XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230831

Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflußhahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind?
Vorausgesetzt wird, für jeden der beiden Hähne, daß aus ihm jeweils in gleichlangen Zeiten gleichgroße Wassermengen entströmen.

230832

Es sei ABCD ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!
b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

230833

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\varrho = 2$ cm und $\gamma = 80^\circ$!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, ϱ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$.

– wenden –

A 8;I

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

230834

Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

230835

a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat. Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wieviel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat. Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wieviel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3,1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

230836

Über fünf Punkte A,B,C,D,M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;
die Punkte A,C,D,B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;
es gilt $AB \parallel CD$;
die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

L 8;I XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

230831) Lösung: 5 Punkte

Ist nur der große Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60}$ des Beckeninhalts aus; ist nur der kleine Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{180}$ des Beckeninhalts aus. Sind nun beide Hähne gleichzeitig geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60} + \frac{1}{180} = \frac{4}{180} = \frac{1}{45}$ des Beckeninhalts aus. Somit ist das Becken nach genau 45 Minuten leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind.

230832) Lösung: 7 Punkte

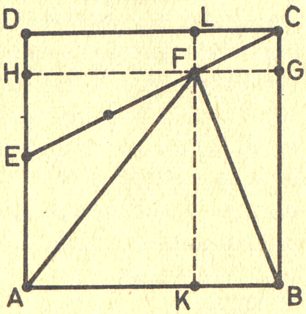

Abb. L 230832

a) Die Parallele durch F zu DC schneide AD in H und BC in G. Da sie auf BC und AD senkrecht steht, ist FG bzw. FH im Dreieck BCF bzw. AEF die zu BC bzw. AE senkrechte Höhe. Für die Flächeninhalte J(BCD), J(AEF) dieser Dreiecke gilt also

$$J(BCF) = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{FG},\quad J(AEF) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{FH}. \qquad (1)$$

Wegen BC ∥ AD folgt ferner nach dem Strahlensatz $\overline{FG}:\overline{FH} = \overline{FC}:\overline{FE} = 1 : 2$, also

$$\overline{FG} = \frac{1}{2}\cdot\overline{FH}. \qquad (2)$$

Da E der Mittelpunkt von AD ist und $\overline{BC} = \overline{AD}$ ist, gilt

$$\overline{BC} = 2\cdot\overline{AE}. \qquad (3)$$

Aus (1),(2),(3) folgt J(BCF) = J(AEF), w.z.b.w.

b) Aus $\overline{FE} = 2\cdot\overline{CF}$ (und $\overline{CF} + \overline{FE} = \overline{CE}$) folgt $\overline{CF} = \frac{1}{3}\overline{CE}$.

Die Parallele durch F zu BC schneide AB in K und DC in L. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\overline{FL} : \overline{ED} = \overline{CF} : \overline{CE} = 1 : 3$, also $\overline{FL} = \frac{1}{3}\overline{ED} = \frac{1}{6}a$. Daher hat im Dreieck ABF die auf AB senkrechte Höhe die Länge $\overline{KF} = \overline{KL} - \overline{FL} = \frac{5}{6}a$. Folglich hat das Dreieck ABF den Flächeninhalt

$$J(ABF) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{KF} = \frac{5}{12}a^2.$$

2. Lösungsweg:

a) Wie im 1. Lösungswet leitet man (1) und (2) her. Aus (2) (und $\overline{FG} + \overline{FH} = a$) folgt $\overline{FG} = \frac{1}{3}a$, $\overline{FH} = \frac{2}{3}a$. Damit ergibt sich

$$J(BCF) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{3}a = \frac{1}{6}a^2,\quad J(AEF) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{3}a = \frac{1}{6}a^2. \qquad (4)$$

b) Aus (4) und dem Quadrat- bzw. Dreiecksflächeninhalt

$$J(ABCD) = a^2,$$
$$J(CDE) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$$

erhält man den gesuchten Flächeninhalt

$$\begin{aligned} J(ABF) &= J(ABCD) - J(BCF) - J(AEF) - J(CDE) \\ &= a^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{5}{12}a^2. \end{aligned}$$

230833) Lösung: **7 Punkte**

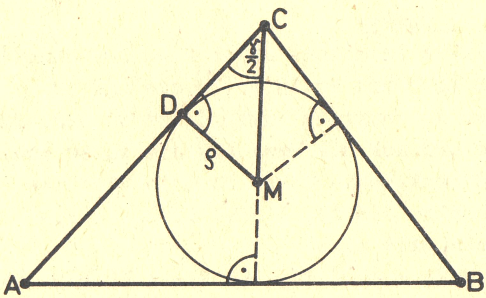

Abb. L 230833

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M; der Inkreis berühre die Seite AC in D. Dann ist $\overline{MD} = \varrho$, $\angle CDM = 90^\circ$ und, da M auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt, $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$.

Ferner liegt A auf der Verlängerung von CD über D hinaus im Abstand $\overline{CA} = b$ von C. Schließlich ist die Gerade durch A,B die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von A an den Inkreis, und die Gerade durch C,B ist die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von C an den Inkreis.

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck CDM aus $\overline{MD} = \varrho$, $\angle CDM = 90^\circ$ und $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$.

(2) Man konstruiere die Verlängerung von CD über D hinaus und trage auf dem damit erhaltenen von C aus durch D gehenden Strahl von C aus die Strecke CA der Länge b ab.

(3) Man konstruiere den Kreis k um M durch D und die von der Geraden durch A,C verschiedenen Tangenten von den Punkten A und C an diesen Kreis. Ihr nach Verlängerung jeweils über den Berührungspunkt hinaus entstehender Schnittpunkt sei B.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (2) ist $\overline{CA} = b$. Nach (1) und (2) ist $MD \perp AC$, also berührt der in (3) konstruierte Kreis k die Strecke AC. Nach (3) berührt er auch AB und BC; folglich ist er der Inkreis des Dreiecks ABC. Sein Radius hat nach (1) die Länge $\overline{MD} = \varrho$. Da sein Mittelpunkt M auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC liegt, hat dieses bei C die Innenwinkelgröße $\overline{\sphericalangle ACB} = 2 \cdot \overline{\sphericalangle DCM}$, nach (1) also $\overline{\sphericalangle ACB} = \gamma$.

IV. Wegen $90^\circ + \frac{\gamma}{2} < 180^\circ$ ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt $\overline{CD} < b$, also ist Konstruktionsschritt (2) mit dem Ergebnis eindeutig ausführbar, daß der erhaltene Punkt A auf der Verlängerung von CD über D hinaus liegt. Die Konstruktion des Kreises k und der Tangenten in (3) ist wegen der somit festgestellten Lage von A außerhalb k ebenfalls eindeutig ausführbar, und diese Konstruktion ergibt auch, daß die Tangenten sich nach Verlängerung jeweils über den Berührungspunkt hinaus schneiden.

Also ist ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u>

Als Begründung für die in IV. genannten Ausführbarkeitsaussagen genügt, wie dort implizit ersichtlich, der Verweis auf die ausgeführte Konstruktion. Eine (mit Hilfe geometrischer Lehrsätze durchgeführte) Herleitung aus den gegebenen Werten von b, ϱ und γ wird nicht vom Schüler verlangt.

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

230834) Lösung: 7 Punkte

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt: Durchläuft man die natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 der Reihe nach, so ist dabei immer wieder genau jede n-te Zahl durch n teilbar. Daraus folgt: Die Anzahl der durch n teilbaren unter den Zahlen von 1 bis 1984 ergibt sich bei der Division von 1984 durch n mit Rest als dabei auftretender Quotient. Dies wird im folgenden wiederholt angewendet:

Wegen 1984 : 5 = 396, Rest 4, gibt es unter den Zahlen von 1 bis 1984 genau 396 Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

Unter ihnen sind aber auch solche Zahlen, die außer durch 5 auch durch 7 und mithin (da 5 und 7 teilerfremd sind) durch 35 teilbar sind. Wegen 1984 : 35 = 56, Rest 24, sind das genau 56 Zahlen.

Ferner wurden bei den durch 5 teilbaren Zahlen alle diejenigen mitgezählt, die außer durch 5 auch durch 11 und mithin (da 5 und 11 teilerfremd sind) durch 55 teilbar sind. Wegen 1984 : 55 = 35, Rest 4, sind das genau 36 Zahlen.

Subtrahiert man nun von der Anzahl 396 die anschließend soeben ermittelten Anzahlen 56 und 36, so werden diejenigen Zahlen zweimal erfaßt, die sowohl durch 5 als auch durch 7 als auch durch 11 und mithin (wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 5, 7 und 11) durch 385 teilbar sind. Wegen 1984 : 385 = 5, Rest 59, sind das genau 5 Zahlen.

Folglich gibt es wegen 396 - 56 - 36 + 5 = 309 unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 genau 309 Zahlen, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind.

230835) Lösung: 7 Punkte

a) Hat K den Radius r und Q die Seitenlänge a, so ist nach Voraussetzung $4a = 2\pi r$, also $a = \frac{\pi}{2} r$. Der Flächeninhalt von K ist $J(K) = \pi r^2$. Der Flächeninhalt von Q ist $J(Q) = a^2 = \frac{\pi^2}{4} r^2$, er beträgt also das $\frac{\pi}{4}$fache, das sind $25\pi\,\% \approx 78{,}5\,\%$ von J(K). Der Flächeninhalt von Q ist also kleiner als der von K.

b) Hat k den Radius ϱ und q die Seitenlänge s, so ist nach Voraussetzung $s^2 = \pi\varrho^2$, also $s = \sqrt{\pi}\,\varrho$. Der Umfang von k ist $2\pi\varrho$. Der Umfang von q ist $4s = 4\sqrt{\pi}\,\varrho$, er beträgt also das $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$fache, das sind $\frac{200}{\sqrt{\pi}}\,\% \approx 112{,}8\,\%$ des Umfangs von k. Der Umfang von q ist also größer als der von k.

<u>Hinweis:</u> Aus dem vorgegebenen Näherungswert für π erhält man $3{,}14155 < \pi < 3{,}14165$. Daraus kann man beweisen, daß die Prozentsatzangaben auf eine Dezimale genau sind, indem man $78{,}45 < 25\pi < 78{,}55$ und $112{,}75 < \frac{200}{\sqrt{\pi}} < 112{,}85$ herleitet. Dies wird hier vom Schüler nicht verlangt.

<u>230836) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

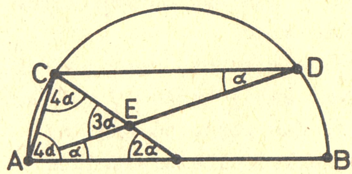

Abb. L 230836

Es sei $\alpha = \overline{\sphericalangle DAB}$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gilt

$$\overline{\sphericalangle CDA} = \overline{\sphericalangle DAB} = \alpha.$$

Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle AMC} = 2 \cdot \overline{\sphericalangle CDA} = 2\alpha.$$

Nach dem Außenwinkelsatz gilt (da $\sphericalangle$ AEC Außenwinkel des Dreiecks AME ist)

$$\overline{\sphericalangle AEC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle EAC} = \overline{\sphericalangle AEC} = 3\alpha$$

und somit $\overline{\sphericalangle MAC} = 4\alpha$.

Wegen $\overline{AM} = \overline{CM}$ ist auch Δ AMC gleichschenklig, und es folgt

$$\overline{\sphericalangle ACM} = 4\alpha.$$

Somit ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz (angewandt auf Δ AMC)

$$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

also $\alpha = 18^\circ$

und somit $\overline{\sphericalangle ACM} = 72^\circ$.

Die gesuchte Winkelgröße ist folglich durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt; sie beträgt 72°.