XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230821

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

230822

Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, daß die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.
Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

230823

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, daß der Punkt M im Innern des Dreiecks ABC liegt.

A 8

Ferner sei $\overline{\sphericalangle CAM} = 20^\circ$ und $\overline{\sphericalangle AMB} = 120^\circ$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle CBM$!

<u>230824</u>

Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, E und F bezeichnet.
Beweise, daß der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

230821) Lösung: 10 Punkte

Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt.
Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen. Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 81 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtliche Quadratzahlen sind.

230822) Lösung: 10 Punkte

Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x+2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x+2)$ Schüler an.

Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x-1)$ Brigaden mit je $(x+4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x-1)(x+4)$.
Folglich gilt

$$x(x+2) = (x-1)(x+4),$$
$$x^2 + 2x = x^2 + 3x - 4,$$
$$x = 4.$$

Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

230823) Lösung: **10 Punkte**

Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt:

$$\overline{\sphericalangle BCA} = 120^\circ : 2 = 60^\circ.$$

D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt aufgrund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\overline{\sphericalangle ADB} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ. \qquad (1)$$

Ferner ist $\sphericalangle BMD$ Nebenwinkel zu $\sphericalangle AMB$, und somit gilt:

$$\overline{\sphericalangle BMD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreick DMB:

$$\overline{\sphericalangle DBM}\ (= \overline{\sphericalangle CBM}) = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ.$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel

$$\overline{\sphericalangle CBM} = 40^\circ.$$

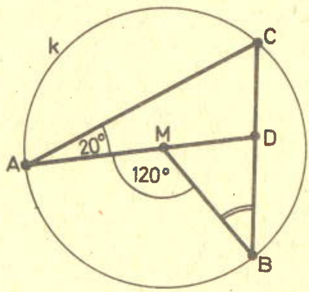

Abb. L 230823

230824) Lösung: **10 Punkte**

Wegen $\overline{\sphericalangle BCE} = \overline{\sphericalangle ACF} = 45^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ACB} = 90^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle ECF} = 180^\circ$, also liegt C auf EF. Wegen $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle CAF} = 45^\circ$, also $\overline{\sphericalangle BAF} = 90^\circ$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\overline{\sphericalangle AFC} = \overline{\sphericalangle CEB} = 90^\circ$ gilt, ist ABEF ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $\overline{AB} = \overline{EF}$.

Das Viereck ADBC ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}$; denn je eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe. Die Diagonale CD des Quadrats ADBC steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{FE}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD} = A_Q$, w.z.b.w.

L 8

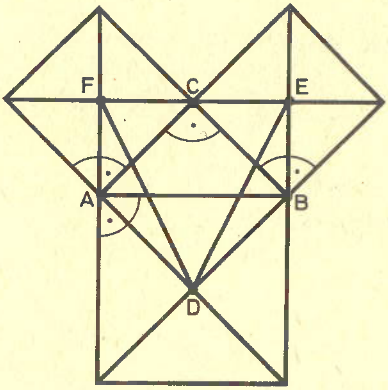

Abb. L 230824

<u>Oder:</u>

Nach Voraussetzung gilt:

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r.$ (1)

Daraus folgt, daß das Dreieck AMC gleichschenklig ist, $\sphericalangle$ MAC und $\sphericalangle$ ACM sind Basiswinkel dieses Dreiecks. Aus dem Satz über Basiswinkel und aus der Voraussetzung folgt:

$\overline{\sphericalangle MAC} = \overline{\sphericalangle ACM} = 20^\circ.$

Nach dem Innenwinkelsatz erhält man

$\overline{\sphericalangle CMA} = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ.$ (2)

Aus (2) und der Voraussetzung folgt

$\overline{\sphericalangle BMC} = 360^\circ - 120^\circ - 140^\circ = 100^\circ.$ (3)

Aus (1) folgt weiter, daß das Dreieck MBC gleichschenklig ist. Für die Größe des Basiswinkels $\sphericalangle$ CBM gilt demnach wegen (3)

$$\overline{\sphericalangle CBM} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

230821	10 Punkte
Ziffern, die sich aus (1) ergeben	3 Pkt.
Ziffern, die sich aus (2) ergeben	3 Pkt.
Angabe der vier Zahlen	4 Pkt.
230822	10 Punkte
Ergebnis	4 Pkt.
Nachweis der Eindeutigkeit	6 Pkt.
230823	10 Punkte
Skizze	1 Pkt.
$\sphericalangle$ BCA mit Begründung	2 Pkt.
$\sphericalangle$ ADB mit Begründung	2 Pkt.
$\sphericalangle$ BMD mit Begründung	2 Pkt.
$\sphericalangle$ CBM mit Begründung	2 Pkt.
230824	10 Punkte
Skizze	1 Pkt.
ABEF ist Rechteck (mit Begründung)	2 Pkt.
ADBC ist Quadrat (mit Begründung)	2 Pkt.
Fläche des Quadrates	2 Pkt.
Fläche des Dreiecks DEF	2 Pkt.
Vergleich	1 Pkt.