Krüger

A 7;I

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230731

Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: "Ich bin 5 Jahre jünger als Elke."
(2) Birgit: "Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit."
(3) Carmen: "Ich bin 14 Jahre alt."
(4) Dorit: "Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen."
(5) Elke: "Birgit und Carmen sind beide jünger als ich."

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gibt für jedes der Mädchen das Alter an!

230732

Beweise, daß jedes Viereck ABCD, in dem die Innenwinkel

$\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle CDA$

die Größen

2α, 3α bzw. 4α

haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

230733

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.

Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her! Beweise, daß ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

20.1.84

5.

230734

Von einer Zahl wird folgendes gefordert:
Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, daß jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und daß jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

230735

Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest: Der Dividend beträgt 60 % des Quotienten, der Divisor beträgt 75 % des Quotienten.

Beweise, daß man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

230736

Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:
Der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ ist größer als 90°.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot \overline{BD} = \overline{AB} = \overline{BC}$.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

230731) Lösung: 7 Punkte

Bezeichnet man das Lebensalter jedes Mädchens entsprechend dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens mit A, B, C, D und E, so folgt aus (2) $D < B < C$

und weiter aus (5) $D < B < C < E$.

Also ist D die kleinste der vier Zahlen B,C,D,E. Da aber D nach (4) nicht die kleinste der fünf Zahlen A,B,C,D,E sein kann, folgt

$$A < D < B < C < E.$$

Nach (3) ist $C = 14$. Somit sind A, D und B drei natürliche Zahlen, für die $10 < A < D < B < 14$ gilt. Das ist nur möglich mit $A = 11$, $D = 12$, $B = 13$. Nach (1) gilt daher $E = 16$.
Somit läßt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig ermitteln, wie alt jedes der fünf Mädchen ist, und zwar gilt: Anja ist 11, Birgit 13, Carmen 14, Dorit 12 und Elke 16 Jahre alt.

230732) Lösung: 6 Punkte

Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck gilt für jedes Viereck mit den genannten Innenwinkelgrößen

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ.$$

Daraus folgt

$$\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle CDA} = \alpha + 4\alpha = 180^\circ.$$

Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen gilt somit

$$AB \parallel DC,$$

also ist ABCD ein Trapez, w.z.b.w.

Hinweis: Man kann auch aus (1) erst $\alpha = 36^\circ$ (und dann daraus (2)) gewinnen, jedoch ist dies nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich.

230733) Lösung: **7 Punkte**

I. Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt: Die auf AB senkrechte Höhe CE hat die Länge $h_c = 4{,}5$ cm, und die Punkte A und B liegen auf der in E auf CE errichteten Senkrechten g. Der Mittelpunkt D der Seite AB liegt auch auf dieser Geraden g, und A und B haben von D den Abstand $\frac{c}{2}$. Außerdem hat D von C den Abstand $s_c = 5$ cm.

II. Damit ist hergeleitet, daß ein Dreieck ABC, wenn es die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, nach folgender Konstruktionsbeschreibung erhalten werden kann:

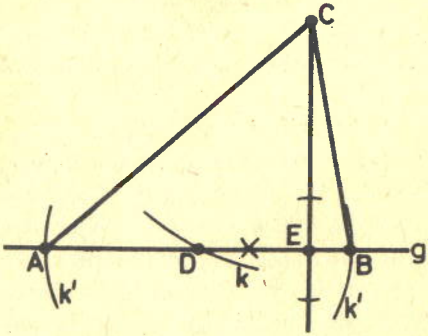

Abb. L 230733

(1) Man konstruiert eine Strecke CE der Länge h_c.

(2) Man errichtet die Senkrechte g in E auf CE.

(3) Man konstruiert den Kreis k um C mit s_c und bezeichnet einen Schnittpunkt von k und g mit D.

(4) Man konstruiert den Kreis k' um D mit $\frac{c}{2}$ und bezeichnet die Schnittpunkte von k' und g mit A und B.

Beweis, daß ein Dreieck ABC, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat: Nach Konstruktionsschritt (4) ist $\overline{AD} = \overline{DB} = \frac{c}{2}$, also einerseits $\overline{AB} = c$, andererseits CD die Seitenhalbierende von AB. Nach Konstruktionsschritt (3) gilt für sie $\overline{CD} = s_c$. Ferner ist CE nach Konstruktionsschritt (2) die auf AB senkrechte Höhe, und nach Konstruktionsschritt (1) gilt für sie $\overline{CE} = h_c$.

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

230734) Lösung: **7 Punkte**

Eine Zahl x hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 1\right) - 1 = 1$$

erfüllt. Diese Gleichung ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 1\right) = 2,$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 1 = 8,$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 9,$$
$$\frac{x}{2} - 1 = 27,$$
$$\frac{x}{2} = 28,$$
$$x = 56.$$

Damit ist bewiesen, daß die Zahl 56 die geforderte Eigenschaft hat und daß sie die einzige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Hinweis: Der hier in Formeln wiedergegebene Lösungsweg kann auch verbal, ohne Einführung einer Variablen x, formuliert werden. Ferner ist bei jeder Lösungsdarstellung darauf zu achten, ob die Aufeinanderfolge der einzelnen Schritte wie oben als logische Äquivalenz oder nur als Schluß in einer Richtung (von der geforderten Eigenschaft zur Lösungsangabe) ausgedrückt wurde. Im letztgenannten Fall ist eine Probe (etwa als "Rückschluß" oder als Bestätigung 56:2 = 28, 28-1 = 27, 27:3 = 9, 9-1 = 8, 8:4 = 2, 2-1 = 1) erforderlich.

230735) Lösung: **6 Punkte**

Ist Q der Quotient, so ist nach Rolands Feststellungen der Dividend $\frac{3}{5}$ Q und der Divisor $\frac{3}{4}$ Q. Die Divisionsaufgabe lautet somit $\frac{3}{5}Q : (\frac{3}{4}Q)$. Ihr Ergebnis ist $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.
Damit ist bewiesen, daß man den Quotienten aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann. Er lautet $\frac{4}{5}$.

Hinweise zur Korrektur:

Eine Angabe von Dividend und Divisor sowie eine Probe ($\frac{12}{25}:\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ mit $\frac{12}{25}$ und $\frac{3}{5}$ als 60 % bzw. 75 % von $\frac{4}{5}$) sind nicht zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich, da die Existenz einer Divisionsaufgabe mit den genannten Eigenschaften aus dem Aufgabentext entnommen werden kann.

Zu akzeptieren (aber nicht zu fordern) ist auch eine Angabe in Dezimalbruchschreibweise: Q = 0,8 (erhalten als Quotient der Aufgabe 0,48:0,6 mit 0,48 und 0,6 als 60 % bzw. 75 % von 0,8; diese Angaben sind nicht verlangt).

230736) Lösung: **7 Punkte**

Die Größe des Winkels $\angle BAC$ sei mit α bezeichnet. Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\overline{\angle ACB} = \overline{\angle BAC} = \alpha$, nach dem Außenwinkelsatz hat also der Nebenwinkel des Winkels $\angle ABC$ die Größe 2α. Da $\overline{\angle ABC} > 90^\circ$ ist, also der Lotfußpunkt D auf der Verlängerung von AB liegt, ist somit $\overline{\angle DBC} = 2\alpha$ gezeigt. Wenn nun B bei der Spiegelung an der Geraden durch C und D den Bildpunkt B' hat, so ist

$$\overline{BB'} = 2\overline{BD} = \overline{BC} = \overline{B'C},$$

also ist das Dreieck BB'C gleichseitig und daher

$$2\alpha = \overline{\angle DBC} = \overline{\angle B'BC} = 60^\circ.$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt, und die gesuchten Winkelgrößen sind ermittelt.

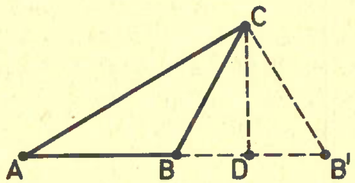

Abb. L 230736