A 7

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230721

Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während des gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

230722

Es sei ABCD ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.
Beweise, daß dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

230723

Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt! Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, daß es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

A 7

230724

Von einem Parallelogramm ABCD wird vorausgesetzt, daß die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

230721) Lösung: **10 Punkte**

Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.
Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3}$ (oder $\frac{8}{12}$) des Gesamtweges.
Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$ des Gesamtweges genau 16 Minuten.
Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

230722) Lösung: **10 Punkte**

Es gilt:

(1) $\overline{AM} = \overline{MC}$;	denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.
(2) $\overline{\sphericalangle FMC} = \overline{\sphericalangle AME} = 90^\circ$;	denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.
(3) $AB \parallel CD$;	da ABCD laut Voraussetzung ein Rechteck ist.
(4) $\overline{\sphericalangle MAE} = \overline{\sphericalangle MCF}$;	da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, daß die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind, w.z.b.w.

L 7

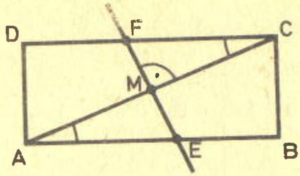

Abb. L 230722

230723) Lösung: 10 Punkte

I) Bezeichnet man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, daß es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

b, g, b, r, g, r, b;

b, g, r, b, r, g, b;

b, g, r, g, b, r, b;

II) Ist $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_8, \ldots$ eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen

(w_1, w_2); (w_2, w_3); ... (w_7, w_8)

vor. Zu den drei verschiedenen Farben b,g,r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen

(b,g); (b,r); (g,b); (g,r); (r,b); (r,g).

Daraus folgt, daß bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müßte, was der gestellten Bedingung widerspricht.

Aus I und II folgt, daß 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

Hinweis: Man kann auch durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle zur Lösung gelangen. Dabei ist der Nachweis erforderlich, daß tatsächlich alle Fälle untersucht wurden.

230724) Lösung: 10 Punkte

Das Dreieck ABE und das Parallelogramm ABCD stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein. Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.

L 7

Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels. Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 5 = 17{,}5$ mithin 17,5 cm^2 und der des Parallelogramms ABCD daher 35 cm^2.

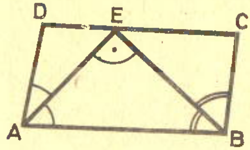

Abb. L 230724

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

230721	10 Punkte
Weg vom Rathaus zum Bahnhof	3 Pkt.
Weg vom Bahnhof zur Schule	3 Pkt.
Zeit für den Weg vom Bahnhof zur Schule	3 Pkt.
Ergebnis	1 Pkt.
230722	10 Punkte
Skizze	1 Pkt.
Feststellung (1) mit Begründung	2 Pkt.
Feststellung (2) mit Begründung	2 Pkt.
Feststellung (4) mit Begründung	4 Pkt.
Angabe des Kongruenzkriteriums	1 Pkt.
230723	10 Punkte
Angabe der Anzahl	3 Pkt.
Angabe eines Beispiels	3 Pkt.
Nachweis, daß es keine Reihe mit mehr Würfeln geben kann	4 Pkt.
230724	10 Punkte
Skizze	1 Pkt.
Flächenvergleich von Dreieck ABE und Parallelogramm ABCD mit Begründung	3 Pkt.
Nachweis $\overline{\sphericalangle BEA} = 90^\circ$	3 Pkt.
Ermittlung der Fläche des Dreiecks ABE	2 Pkt.
Ergebnis	1 Pkt.