

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
 der Deutschen Demokratischen Republik
 2. Stufe (Kreisolympiade)
 Olympiadeklasse 6

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230621

Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden. Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch faßt.

- a) Berechne, wieviel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
- b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

230622

Die abgebildete Figur ABCD (Abb. A 230622) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten AEHD, EFGH und FBCG zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N. Der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD beträgt 48 Flächeneinheiten.

Ermittle

- a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,
- b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
- c) den Flächeninhalt des Vierecks ASHD!

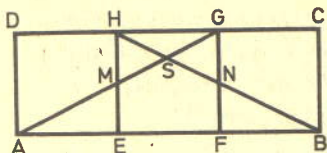


Abb. A 230622

(Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, daß jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleichgroße Dreiecke zerlegt wird.)

230623

Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge). Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgendes ist bekannt:

- (1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
- (2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch. Zeige, daß sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln läßt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten! Gib diese zusammengehörenden Namen an!

230624

Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, daß es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.

Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, daß es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.

Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, daß es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.

- a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, daß alle drei Aussagen wahr sind!
- b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

230621) Lösung:8 Punkte

- a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30\ 550$ sollen insgesamt 30 550 Liter Milch ausgeliefert werden.
- b) Wegen $30550 : 9000 = 3$ Rest 3550 waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

230622) Lösung:12 Punkte

Wegen $48 : 3 = 16$ beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten. Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Der Abbildung L 230622 ist dann zu entnehmen:

Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist MNGH ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat EFGH. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten. Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

- a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck MNGH in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
- b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks EPNM sowie des Dreiecks MNS. Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck EPNM, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

- c) Der Flächeninhalt des Vierecks ASHD ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks PMHD und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks ASHD 14 Flächeneinheiten.

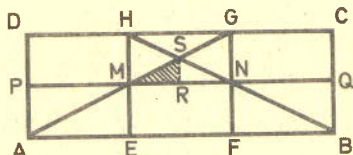


Abb. L 230622

Hinweis auf 2. Lösungsweg:

Sei R der Mittelpunkt von MN. Dann hat Dreieck MRS den Inhalt von 1 Flächeneinheit. Durch weitere Hilfslinien lassen sich alle vorkommenden Teilflächen in solche Teildreiecke zerlegen. Die gesuchten Inhalte lassen sich dann durch Auszählen finden.

230623) Lösung:12 Punkte

Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt:

(3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.

Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(4) Giebler hat den Vornamen Christian.

Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.

Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

Anmerkung:

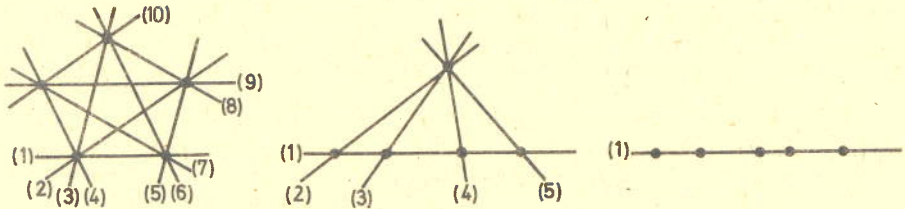
1. Es gibt zahlreiche andere Lösungswege. Man kann z. B. den Familiennamen Freimuth für Bernd direkt aus (1) und (2) folgern.
2. Wird eine Lösung mittels einer Tabelle gefunden, dann muß ersichtlich sein, aufgrund welcher Angaben gewisse Felder der Tabelle nicht belegt werden dürfen.

L 6

230624) Lösung:

12 Punkte

a) Folgende Beispiele zeigen, daß alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden 5 Verbindungsgeraden 1 Verbindungsgerade

Abb. L 230624a

b) Folgende beiden Beispiele zeigen, daß die fünf Punkte auch so liegen können, daß es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:

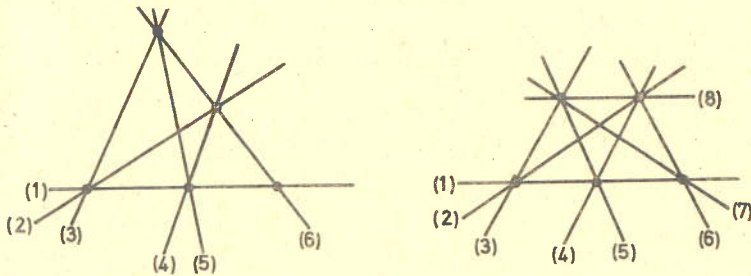


Abb. L 230624b

Hinweis: Der Nachweis, daß hiermit alle Möglichkeiten erfaßt sind, wird vom Schüler nicht verlangt.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 6 Gesamtpunktzahl: 40

230621 8 Punkte

- | | |
|--|-----------------|
| a) Für jedes richtige Zwischenergebnis | |
| je 1 Punkt | zusammen 4 Pkt. |
| Gesamtergebnis | 1 Pkt. |
| b) Für Division | 1 Pkt. |
| Für richtige Angabe im Antwortsatz | 2 Pkt. |

230622 12 Punkte

Für jede richtig gelöste Teilaufgabe je 4 Punkte
 (und zwar für richtige Überlegung 3 Punkte,
 für Berechnung 1 Punkt)

230623 12 Punkte

Für jeden der angegebenen Schlüsse je 3 Punkte.

230624 8 Punkte

- | | |
|----|--------|
| a) | 4 Pkt. |
| b) | 4 Pkt. |