A 11/12;I

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

221231

Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55,\\
2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60,\\
3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65,\\
4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70,\\
5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75
\end{aligned}$$

zu ermitteln.

221232

Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1,\ldots,30)$, die $\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$ erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Von den folgenden Aufgaben 221233A und 221233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

221233A

a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
   In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks $F \leqq p\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a,b,c und den Flächeninhalt F des Dreiecks $F \leqq q\cdot(a^2+b^2+c^2)$.

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

<u>221233B</u>

Man beweise:

a) Wenn es zu einem Tetraeder ABCD eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$. (1)

b) Wenn (1) für ein Tetraeder ABCD gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt.

<u>Definition:</u>

Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

221234

Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichne f die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f(x) = \sin \frac{c}{x}$$

definierte Funktion.

Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.

a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leqq x \leqq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.

b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, daß f im Intervall $20 \leqq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat. Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

221235

a) Man beweise: Wenn a,b,c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac-b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x,y, die nicht beide 0 sind,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0.$$

b) Man beweise: Wenn a,b,c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac-b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x,y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0;0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften: Für die Koordinaten $(x_1;y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$; für die Koordinaten $(x_2;y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

221236

Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden. Zu jedem Schloß soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloß passen soll. Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloß. Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:

A 11/12;II

Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloß auch ein passender Schlüssel;
immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloß keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

L 11/12;I XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

221231) Lösung: 6 Punkte

I. Das angegebene Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \qquad (+)$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5. \qquad (++)$$

Dies ergibt sich z. B. auf folgendem üblichen Wege: Man subtrahiert das 2-, 3-, 4- bzw. 5fache der ersten gegebenen Gleichung von der zweiten, dritten, vierten, bzw. fünften, dividiert durch (-10), (-20), (-30) bzw. (-40) und erhält übereinstimmend (++). Zu (+) gelangt man[1] z. B., indem man die erste gegebene Gleichung von der zweiten subtrahiert. Umgekehrt[2] erhält man aus (+), (++) die gegebenen Gleichungen, indem man zum 10fachen von (+) das 1-, 2-, 3-, 4- bzw. 5fache von (++) addiert.

II. Wenn (+), (++) durch nichtnegative ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 erfüllt werden, so folgt, daß dies nur die Werte der Tabelle

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Nr.
3	1	0	0	1	(1)
3	0	1	1	0	(2)
2	2	0	1	0	(3)
2	1	2	0	0	(4)
1	3	1	0	0	(5)
0	5	0	0	0	(6)

sein können. Zum Beweis kann man etwa die Möglichkeiten für x_5, x_4, x_3 diskutieren (und dann jeweils x_2, x_1 aus (++) bzw. (+) erhalten), z. B. folgendermaßen:

---

1 Die Einführung von (+) ist für das Folgende nicht unbedingt erforderlich.

2 Dieser "Rückschluß" kann auch dadurch ersetzt werden, daß in III. die "Probe" nicht mit (+), (++), sondern mit dem gegebenen Gleichungssystem durchgeführt wird.

Wäre $x_5 \geqq 2$, so wäre $x_2+2x_3+3x_4+4x_5 \geqq 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 2 = 8$ im Widerspruch zu (++). Also ist $x_5 = 1$ oder $x_5 = 0$.

Aus $x_5 = 1$ und (++) folgt $x_2+2x_3+3x_4 = 1$. Damit ergäben $x_3 \geqq 1$, $x_4 \geqq 1$ jeweils einen Widerspruch, also verbleibt nur $x_3 = x_4 = 0$ und hiernach (1).

Aus $x_5 = 0$ und (++) folgt

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \qquad (+++)$$

und dann weiter: Wäre $x_4 \geqq 2$, so wäre $x_2+2x_3+3x_4 \geqq 6$ im Widerspruch zu (+++). Also ist $x_4 = 1$ oder $x_4 = 0$.

Aus $x_4 = 1$ und (+++) folgt $x_2+2x_3 = 2$. Damit ergäbe $x_3 \geqq 2$ einen Widerspruch, also verbleiben nur: Entweder gilt $x_3 = 1$ und hiernach (2), oder es gilt $x_3 = 0$ und hiernach (3).

Aus $x_4 = 0$ und (+++) folgt $x_2+2x_3 = 5$. Damit ergäbe $x_3 \geqq 3$ einen Widerspruch, also verbleiben für x_3 nur 2, 1 oder 0 und hiernach (4),(5) bzw. (6).

III. Die Zahlen in (1),...,(6) sind nichtnegativ, ganzzahlig und erfüllen (+),(++).

Mit den in (I),(II),(III) gezeigten Aussagen ist bewiesen, daß genau (1),...,(6) alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

Hinweis zur Korrektur: Beim Übergang zwischen Gleichungssystemen (z. B. zwischen dem gegebenen System und dem System (+),(++)) ist zu prüfen, ob erforderliche Äquivalenzaussagen oder Hin- und Rückschlüsse ("Herleitung" und "Probe") dargelegt sind. Bei der Falldiskussion (Nutzung von Nichtnegativität und Ganzzahligkeit) ist zu prüfen, ob der Nachweis der Lückenlosigkeit vorliegt (mindestens als Darstellung der Systematik einer Fallaufzählung).

221232) Lösung: 6 Punkte

I. Ist $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ ein 30-Tupel von positiven ganzen Zahlen a_i mit

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983 \qquad (1)$$

und ist d der größte gemeinsame Teiler[1] der a_i, so folgt:

1 Hier genügt anstelle des Begriffes "der größte gemeinsame Teiler" auch der Begriff "ein (positiver) gemeinsamer Teiler".

Für jedes $i = 1,\dots,30$ existiert wegen $d \mid a_i$ eine positive ganze Zahl k_i mit

$$a_i = d\cdot k_i. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\sum_{i=1}^{30} d\cdot k_i = 1983;$$ für die Zahl

$$\sum_{i=1}^{30} k_i = k \qquad (3)$$

gilt mithin

$$d\cdot k = 1983. \qquad (4)$$

Wegen $k_i \geqq 1$ $(i = 1,\dots,30)$ und (3) ist $k \geqq 30$; hiernach und wegen der Primfaktorzerlegung $1983 = 3 \cdot 661$ muß $k \geqq 661$ und damit nach (4)

$$d \leqq 3$$

sein.

II. Es gibt ein 30-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_{30})$ von positiven ganzen Zahlen a_i mit (1), deren größter gemeinsamer Teiler[1] $d = 3$ beträgt.

Beispielsweise hat das 30-Tupel $(3,3,\dots,3,1896)$ wegen $29\cdot 3 + 1896 = 1983$ und $3 \mid 1896$ diese Eigenschaften.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß der gesuchte größte Wert $d = 3$ beträgt.

<u>221233A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) I. Ist ABCD ein (konvexes) Viereck, F sein Flächeninhalt und $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$, $\delta = \overline{\sphericalangle CDA}$, so gilt

$$F = \frac{ab}{2}\cdot \sin\beta + \frac{cd}{2}\cdot\sin\delta ,$$

wegen $\sin\beta \leqq 1$, $\sin\delta \leqq 1$, $0 < ab \leqq \frac{a^2+b^2}{2}$, $0 < cd \leqq \frac{c^2+d^2}{2}$ also

$$F \leqq \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

II. Es gibt konvexe Vierecke, bei denen für die Seitenlängen a,b,c,d und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (1)$$

gilt; denn es gibt Vierecke mit $a = b = c = d$ und $\beta = \delta = 90^\circ$, diese sind (Quadrate, also) konvex, und für sie gilt $F = a^2$, also (1).

Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl p mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $p = \frac{1}{4}$.

b) I. Ist ABC ein Dreieck, F sein Flächeninhalt und $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung $s-a \geqq 0$, $s-b \geqq 0$, $s-c \geqq 0$. Hieraus und aus der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nichtnegativer reeller Zahlen folgt

$$\begin{aligned} F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leqq \sqrt{s\left(\tfrac{1}{3}(s-a + s-b + s-c)\right)^3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\, s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2 \\ &= \frac{1}{36}\sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2+ 2ab + 2ac + 2bc) \\ &\leqq \frac{1}{36}\sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2 + a^2+b^2 + a^2+c^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

II. Es gibt Dreiecke, bei denen für die Seitenlängen a,b,c und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

gilt; denn für gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a (=b=c) gilt $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$, also (2).

Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl q mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $q = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

221233B) Lösung: 8 Punkte

a) Wenn eine Kugel K die Kanten BC,CA,AB,AD,BD,CD eines Tetraeders ABCD in U,V,W,X,Y,Z berührt (Abb. L 221233B), so folgt:
Die Ebene durch A,B,C hat mit K die Punkte U,V,W gemeinsam, sie schneidet K also in einem Kreis. Dieser berührt[1] die Geraden durch B,C bzw. durch C,A in U bzw. V. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt daher $\overline{CV} = \overline{CU}$. Entsprechend folgt

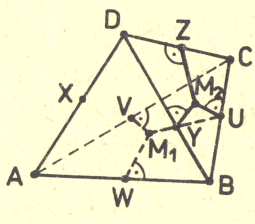

Abb. L 221233B

$$\overline{CZ} = \overline{CV} = \overline{CU},$$
$$\overline{AW} = \overline{AV} = \overline{AX},$$
$$\overline{BW} = \overline{BY} = \overline{BU},$$
$$\overline{DZ} = \overline{DY} = \overline{DX}$$

und damit durch Addition (1).

b) Wenn (1) für ein Tetraeder ABCD gilt, so folgt:
Man bezeichne die Ebenen, in denen die Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD liegen, mit e_1, e_2, e_3, e_4, ferner die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecke mit M_1, M_2, M_3, M_4 sowie die Inkreisberührungspunkte (in der aus Abb. L 221233B ersichtlichen Verteilung) mit U_1, V_1, W_1 bzw. Z_2, Y_2, U_2 bzw. X_3, Z_3, V_3 bzw. Y_4, X_4, W_4.
Dann ist $\overline{AV_1} = \overline{AW_1}$, $\overline{BW_1} = \overline{BU_1}$, $\overline{CU_1} = \overline{CV_1}$, also

$$\frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}(\overline{BU_1} + \overline{CU_1} + \overline{AV_1} + \overline{CV_1} - \overline{AW_1} - \overline{BW_1})$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{BU_1} + \overline{CU_1} + \overline{AV_1} + \overline{CU_1} - \overline{AV_1} - \overline{BU_1}) = \overline{CU_1}.$$

Entsprechend ist $\overline{CU_2} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{BD})$. Unter Anwendung von (1) folgt

$$\overline{CU_2} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{CU_1}.$$

Damit ist $U_1 = U_2$ gezeigt.
Ebenso folgt $V_1 = V_3$, $W_1 = W_4$, $X_3 = X_4$, $Y_4 = Y_2$, $Z_2 = Z_3$. Für die genannten Punkte können demnach die Bezeichnungen U, V, W, X, Y, Z verwendet werden[2]. Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius stehen UM_1 und UM_2 senkrecht auf BC, also ist die Ebene u durch U, M_1, M_2 senkrecht auf BC und damit senkrecht auf e_1. Folglich enthält u auch die in M_1 auf e_1 errichtete Senkrechte g_1. Ebenso enthält u die in M_2 auf e_2 errichtete Senkrechte g_2. Da e_1 und e_2 nicht zueinander parallel sind, ist $g_1 \nparallel g_2$. Somit schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt M.
Da nun MM_1U, MM_1V, MM_1W rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Kathete MM_1 und gleichlangen Katheten M_1U, M_1V, M_1W sind, folgt $\overline{MU} = \overline{MV} = \overline{MW}$.
Ebenso folgt $\overline{MU} = \overline{MY} = \overline{MZ}$. Damit ist bewiesen: Die Kugel[3] K durch U, V, W, Y geht auch durch Z. Analog folgt, daß K auch durch X geht.
Die Schnittkreise von K mit e_1, e_2, e_3, e_4 sind folglich die Kreise durch U, V, W bzw. durch Z, Y, U bzw. durch X, Z, V bzw. durch Y, X, W, also die Inkreise der Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD.
Daher berührt[1] K alle Kanten des Tetraeders.

Hinweise zur Korrektur:

1 Hier wird verwendet: Der Kreis k, in dem eine Kugel K eine Ebene e schneidet, berührt genau dann eine in e liegende Gerade g, wenn die Kugel K diese Gerade berührt. Zu einem Beweis, der vom Schüler nicht gefordert wird, kann man etwa gelangen, indem man für die Mittelpunkte M, M' von K bzw. k, für den vorausgesetzten Berührungspunkt P und beliebiges X auf g nachweist, daß $\overline{MX} > \overline{MP}$ genau dann gilt, wenn $\overline{M'X} > \overline{M'P}$ ist.

2 Der folgende Beweisteil dient dem Nachweis, daß durch die Inkreise der Dreiecke ABC,BCD,CAD,ABD wegen der gezeigten Übereinstimmung von Inkreisberührungspunkten eine Kugel K geht. Als anschauliches Motiv hierzu kann folgende Feststellung dienen: Durch die Inkreise der Dreiecke ABC und BCD muß eine Kugel K gehen, da diese Kreise genau einen gemeinsamen Punkt (U) und in diesem eine gemeinsame Tangente haben. Für diese Existenzaussage fehlt in der genannten anschaulichen Beschreibung ein Beweis (etwa der oben dem weiteren Lösungsverlauf zu entnehmende). Dennoch kann sie als Teil eines zum Ziel führenden Lösungsweges angerechnet werden.

3 Die Existenz und eindeutige Bestimmtheit einer Kugel durch vier nicht komplanare Punkte U,V,W,Y kann als bekannte Aussage zitiert oder z. B. dadurch bewiesen werden, daß man (analog wie bei dem üblichen Beweis für den Kreis durch drei nicht kollineare Punkte) mit dem Schnittpunkt der mittelsenkrechten Ebenen der Strecken UV, UW, UY argumentiert.

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

221234) Lösung: 6 Punkte

a) Für jedes positive reelle c gilt: Eine positive Zahl x ist genau dann Nullstelle von f, wenn eine ganze Zahl k mit

$$\frac{c}{x} = k\pi \tag{1}$$

existiert. Nun ist (1) äquivalent mit

$$x = \frac{c}{k\pi}. \tag{2}$$

Daher führt eine ganze Zahl k genau dann auf eine Nullstelle x mit $10 \leqq x \leqq 20$, wenn sie

$10 \leqq \frac{c}{k\pi} \leqq 20$ erfüllt. Dies ist äquivalent mit

$$\frac{c}{20\pi} \leqq k \leqq \frac{c}{10\pi}.$$

Insbesondere führt eine ganze Zahl k_1 bzw. k_2 genau dann vermöge (2) auf 10 bzw. 20 als Nullstelle, wenn

$$k_1 = \frac{c}{10\pi} \text{ bzw. } k_2 = \frac{c}{20\pi}$$

gilt. Sind für ein positives reelles c diese beiden Zahlen ganz, so befinden sich im Intervall $10 \leqq x \leqq 20$ genau dann m Nullstellen, wenn es genau m ganze Zahlen k mit

$$\frac{c}{20\pi} \leqq k \leqq \frac{c}{10\pi} \tag{3}$$

gibt. Das trifft genau dann zu, wenn erstens

$$\frac{c}{20\pi} \text{ eine ganze Zahl} \tag{4}$$

ist und zweitens

$$\frac{c}{10\pi} = \frac{c}{20\pi} + m-1 \tag{5}$$

gilt.

Angenommen, für ein positives reelles c seien (4) und (5) erfüllt. Dann folgt $2c = c + 20(m-1)\pi$, also

$$c = 20(m-1)\pi .$$

Umgekehrt ist für dieses c in der Tat $\frac{c}{20\pi} = m-1$ eine ganze Zahl, also (4) erfüllt, und es gilt (5).

Daher hat genau die Zahl $c = 20(m-1)\pi$ die in a) verlangte Eigenschaft.

b) Für sie gilt weiter: Eine ganze Zahl k führt genau dann vermöge (2) auf eine Nullstelle $x \geqq 20$, wenn sie $\frac{c}{k\pi} \geqq 20$ erfüllt. Das ist äquivalent mit

$$0 < k \leqq \frac{c}{20\pi} = m-1. \tag{6}$$

Da es nur endlich viele solche ganzen Zahlen gibt, hat f im Intervall $20 \leqq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen, wie behauptet.

Für die jeweils zu zwei ganzen Zahlen $k, k' > 0$ gehörenden Nullstellen $x = \frac{c}{k\pi}$, $x' = \frac{c}{k'\pi}$ gilt genau dann $x < x'$, wenn $k > k'$ gilt. Also gehört die größte Nullstelle von f zum kleinsten Wert von k mit (6), d. h. zum Wert $k = 1$. Somit ist die in b) gesuchte größte Nullstelle

$$x = \frac{c}{\pi} = 20(m-1).$$

<u>221235) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a) Wegen $a \neq 0$ ist

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \frac{1}{a}(a^2x^2+2abxy+b^2y^2-b^2y^2+acy^2)$$
$$= \frac{1}{a}((ax + by)^2 + y^2(ac - b^2)).$$

Ist $y \neq 0$, so ist $y^2 > 0$. Hieraus und aus $a > 0$, $(ax+by)^2 \geqq 0$, $ac-b^2 > 0$ folgt $ax^2+2bxy+cy^2 > 0$.

Ist $y = 0$ und daher nach Voraussetzung $x \neq 0$, so ergibt sich wegen $a > 0$ ebenfalls $ax^2+2bxy+cy^2 = ax^2 > 0$.

b) Ist r der Radius eines beliebigen Kreises k um (0;0), so kann man z. B. $y_1 = 0$ und eine Zahl x_1 mit $0 < x_1 < r$ wählen. Der Punkt P_1 mit diesen Koordinaten $(x_1;y_1)$ erfüllt dann $x_1^2+y_1^2 = x_1^2 < r^2$, er liegt also im Innern des Kreises k, und er erfüllt $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_1^2 > 0$.

Ferner kann man z. B. eine Zahl t mit $0 < t < \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$ wählen und dann $x_2 = bt$, $y_1 = -at$ setzen. Der Punkt P_2 mit diesen Koordinaten $(x_2;y_2)$ erfüllt $x_2^2 + y_2^2 = (a^2+b^2)t^2 < r^2$, er liegt also im Innern des Kreises k, und er erfüllt

$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 = \frac{1}{a}((ax_2+by_2)^2 + y_2^2(ac-b^2))$$
$$= \frac{1}{a}((abt-bat)^2 + a^2t^2(ac-b^2)) = at^2(ac-b^2),$$

wegen $a > 0$, $t > 0$, $ac-b^2 < 0$ also $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + ay_2^2 < 0$.

Andere Lösungsvarianten, z. T. mehr anschaulicher Art, sind möglich. Beispielsweise kann man zu b) feststellen, daß für alle von (0;0) verschiedenen Punkte der Geraden $y = 0$ bzw. der Geraden $ax+by = 0$ der Wert $\frac{1}{a}((ax+by)^2 + y^2(ac-b^2))$ positiv bzw. negativ wird und daß das Innere jedes Kreises um (0;0) mit diesen durch den Mittelpunkt gehenden Sekanten gemeinsame von (0;0) verschiedene Punkte hat.

221236) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn der Vorschlag realisiert ist, so gilt:
Zu jeder Menge M aus fünf Personen gibt es (mindestens) ein Schloß, zu dem keine der fünf Personen einen Schlüssel hat. Ein derartiges Schloß werde jeweils M zugeordnet. Gäbe es bei einer solchen Zuordnung zwei verschiedene Mengen M, M' (aus je fünf der elf Personen) mit gleichem zugeordneten Schloß, so hätte keine der Personen in $M \cup M'$ einen Schlüssel hierzu. Wegen $M \neq M'$ bestünde aber $M \cup M'$ aus mindestens sechs Personen, womit ein Widerspruch erreicht ist. Verschiedenen Mengen M, M' sind somit stets verschiedene Schlösser zugeordnet, also gibt es mindestens so viele Schlösser wie Mengen aus je fünf der elf Personen. Die Anzahl solcher Mengen ist $\binom{11}{5}$. Daher kann der Vorschlag nur dann realisiert sein, wenn die Anzahl der Schlösser mindestens $\binom{11}{5}$ beträgt.

II. Mit genau $\binom{11}{5}$ Schlössern ist der Vorschlag realisierbar, z. B. durch folgende Schlüsselverteilung:
Wegen $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$ kann man auch eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen Schlössern und allen Mengen Q aus je sechs der elf Personen wählen. Dann verteile man zu jedem Schloß passende Schlüssel genau an die Personen derjenigen Menge Q, die diesem Schloß zugeordnet wurde.
In der Tat ist damit das Vorhaben realisiert.
Sei nämlich einerseits P eine beliebige Menge aus sechs der elf Personen und sei S ein beliebiges der $\binom{11}{5}$ Schlösser. Um zu zeigen, daß mindestens eine der Personen aus P einen zu S passenden Schlüssel hat, betrachte man diejenige Menge Q, die dem Schloß S zugeordnet war. Da sowohl P als auch Q je sechs Personen enthalten, ist $P \cap Q$ nicht leer; also gibt es in der

Menge P mindestens eine Person, die auch zu Q gehört und daher einen zu S passenden Schlüssel hat.
Sei andererseits M eine beliebige Menge aus fünf der elf Personen. Um zu zeigen, daß für mindestens ein Schloß keine Person aus M einen passenden Schlüssel hat, betrachte man dasjenige Schloß S, das der Menge Q der sechs nicht zu M gehörenden Personen zugeordnet war. Die zu S passenden Schlüssel wurden genau an die Personen der Menge Q verteilt, also hat dabei keine Person aus M einen dieser Schlüssel erhalten.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß die gesuchte kleinste Anzahl von Schlössern

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$$

beträgt. Zugleich ist in II. eine Schlüsselverteilung beschrieben, mit der der genannte Vorschlag realisierbar wäre.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Die hier in mengentheoretischer Ausdrucksweise beschriebenen Beweisschritte sind bei der Korrektur vor allem auf Vollständigkeit zu prüfen, auch wenn sie mehr umgangssprachlich formuliert sind (was akzeptiert werden kann).