A 11/12

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

221221

Man ermittle alle Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x(y+z) = 5 \tag{1}$$
$$y(x+z) = 8 \tag{2}$$
$$z(x+y) = 9 \tag{3}$$

erfüllen!

221222

Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a,b,c, die Beziehungen

$$a \leqq 1\text{ cm} \leqq b \leqq 2\text{ cm} \leqq c \leqq 3\text{ cm} \tag{1}$$

gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt. Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

221223

Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt

$$a + b = d + v. \tag{1}$$

Man untersuche, für welche a,b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

221224

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ gegeben. Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.
Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.

a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, daß damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfaßt sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geqq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

221221) Lösung: 9 Punkte

I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1),(2),(3) erfüllt, so folgt

$$\begin{aligned} xy + xz \phantom{{}+ yz} &= 5, \\ xy \phantom{{}+ xz} + yz &= 8, \\ xz + yz &= 9. \end{aligned}$$

Durch Addition und Halbieren folgt

$$xy + xz + yz = 11$$

und damit

$$\begin{aligned} yz &= 6, \\ xz &= 3, \\ xy &= 2. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation und Quadratwurzelziehen folgt

$$xyz = \pm 6$$

und damit

$$\begin{aligned} x &= \pm 1, \\ y &= \pm 2, \\ z &= \pm 3, \end{aligned}$$

entweder überall mit dem oberen oder überall mit dem unteren Vorzeichen. Daher können nur die Tripel

$(1;2;3)$ und $(-1;-2;-3)$ (4)

das Gleichungssystem (1),(2),(3) erfüllen.

II. Sie erfüllen dieses Gleichungssystem; denn es gilt

$$\begin{aligned} 1\cdot(2+3) &= (-1)(-2-3) = 5, \\ 2\cdot(1+3) &= (-2)(-1-3) = 8, \\ 3\cdot(1+2) &= (-3)(-1-2) = 9. \end{aligned}$$

Somit sind genau die in (4) genannten Tripel die gesuchten.

(In Lösungsteil I gibt es natürlich zahlreiche andere Eliminationsmöglichkeiten. Tritt in einer Schülerlösung bei einem solchen Rechenweg eine Division auf, so ist bei der Korrektur zu beachten, ob der Schüler den Fall, daß der geplante Nenner 0 ist, gesondert behandelt, z. B. nachweist, daß für diesen Fall das Gleichungssystem nicht erfüllt wird.)

<u>221222) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

I. Für jedes Dreieck, dessen Seitenlängen die geforderten Ungleichungen erfüllen, gilt:
Ist γ die Größe des von den Seiten der Längen a,b eingeschlossenen Winkels und ist F der Flächeninhalt des Dreiecks, so ist

$$F = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma \leqq \frac{1}{2} \cdot 1\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 1 = 1\ \text{cm}^2.$$

II. Es gibt ein Dreieck, dessen Seitenlängen die geforderten Ungleichungen erfüllen und das den Flächeninhalt 1 cm^2 hat. Beispielsweise hat ein Dreieck mit $a = 1$ cm, $b = 2$ cm und $\gamma = 90^\circ$ diese Eigenschaft; denn hierfür gilt nach dem Satz des Pythagoras $c = \sqrt{5}$ cm, also sind wegen $2 \leqq \sqrt{5} \leqq 3$ einerseits die geforderten Ungleichungen erfüllt, andererseits ergibt sich
$F = \frac{1}{2} \cdot 1\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 1 = 1\ \text{cm}^2$.

Mit I und II ist bewiesen: Unter allen Dreiecken, deren Seitenlängen die geforderten Ungleichungen erfüllen, gibt es eines mit größtmöglichem Flächeninhalt, und dieser beträgt 1 cm^2.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Werden Seitenlängen von vornherein auf Randwerte aus den geforderten Ungleichungen eingeschränkt (z. B. mit den Feststellungen, daß b = 2 cm, c = 3 cm sowie a = 1 cm, c = 3 cm übereinstimmend auf a = 1 cm, b = 2 cm, c = 3 cm und damit F = 0 führen, sowie daß für a = 1 cm, b = 2 cm das Maximum von F bei $c = \sqrt{5}$ cm erreicht wird), ohne daß diese Einschränkung auf Randwerte begründet wird, so sind auf diese Lösungsteile höchstens 6 von 10 Punkten zu geben.

<u>221223) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Da d Teiler von a und b ist, gibt es natürliche Zahlen x und y mit
$a = dx, \quad b = dy.$
Dabei enthält d als größter gemeinsamer Teiler alle in a und b gemeinsam enthaltenen Primfaktoren, während x bzw. y sich aus allen

übrigen, jeweils nur in a bzw. nur in b enthaltenen Primfaktoren zusammensetzen. Somit ist das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b die Zahl

$$v = dxy.$$

Damit ergibt sich $a+b = d(x+y)$ und $d+v = d(1 + xy)$, also

$$d+v - (a+b) = d(1 + xy - x - y)$$
$$= d(x - 1)(y - 1).$$

Wegen $d > 0$, $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ folgt hieraus $d+v = (a+b) \geqq 0$ und damit die zu beweisende Ungleichung.

Ferner folgt: Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$x = 1 \quad \text{oder} \quad y = 1$$

gilt. Dies ist äquivalent damit, daß a bzw. b sich **nur** aus den gemeinsam in a und b enthaltenen Primfaktoren zusammensetzt, d. h. damit, daß

$$a \mid b \quad \text{oder} \quad b \mid a$$

gilt.

Ein etwas <u>anderer Lösungsweg</u> besteht darin, die Gleichung $ab = dv$ nachzuweisen (oder als bekannt zu zitieren). Nach dieser Gleichung ist $d(d+v-(a+b)) = d^2 + dv - ad - bd = d^2 + ab - ad - bd = (a-d)(b-d)$, woraus wegen $a,b \geqq d > 0$ entsprechend weiter geschlossen werden kann.

<u>221224)Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

Die Bezeichnung der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ kann o.B.d.A. so gewählt werden, daß die Punkte bei einem Umlauf des Kreises in dieser Reihenfolge angeordnet sind.

a) In Abbildung L 221224 sind Möglichkeiten dargestellt, für sechs gegebene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$ eine Menge von drei Sehnen so zu zeichnen, daß alle Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt sind.

Nun wird bewiesen, daß dies alle Möglichkeiten der geforderten Art sind:

P_1 kann nicht mit P_3 verbunden sein, da sonst P_2 nur unter Verletzung der Forderungen mit einem anderen der P_i verbunden werden könnte.

Ebenso kann P_1 nicht mit P_5 verbunden sein. Also verbleiben nur die folgenden Möglichkeiten:

(1) P_1 ist mit P_2 verbunden.
Dann kann P_3 nicht mit P_5 verbunden sein. Also verbleiben nur:

(1.1) P_3 ist mit P_4 verbunden.
Dann verbleibt nur: P_5 ist mit P_6 verbunden.

(1.2) P_3 ist mit P_6 verbunden.
Dann verbleibt nur: P_4 ist mit P_5 verbunden.

(2) P_1 ist mit P_4 verbunden.
Dann verbleibt nur: P_2 ist mit P_3 und P_5 ist mit P_6 verbunden.

(3) P_1 ist mit P_6 verbunden.
Analog zu (1) verbleiben dann nur:

(3.1) P_2 ist mit P_3 und P_4 ist mit P_5 verbunden.

(3.2) P_2 ist mit P_5 und P_3 ist mit P_4 verbunden.

Damit ist bewiesen: $A_3 = 5$.

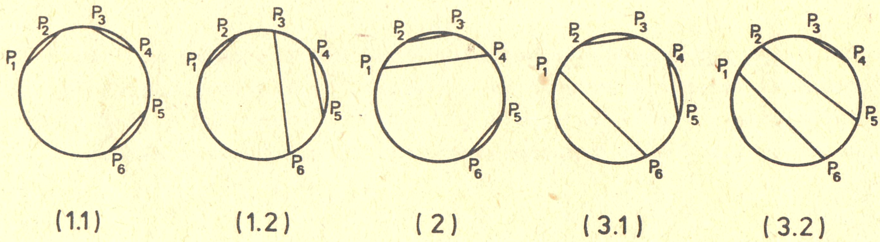

Abb. L 221224

b) Für 2n gegebene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ gilt: Wäre P_1 verbunden mit einem Punkt P_m mit ungeradem m, so gäbe es bereits für die Punkte

$$P_2, \ldots, P_{m-1}, \qquad (+)$$

deren Anzahl m-2 ungerade wäre, keine Sehnenmenge unter Einhaltung der Forderungen, sondern einer der Punkte (+) müßte unter Verletzung der Forderungen mit einem von (+) verschiedenen Punkt verbunden sein. Also kann P_1 nur mit einem der Punkte $P_2, P_4, \ldots, P_{2n-2}, P_{2n}$ verbunden sein.

(1) Sei P_1 mit P_2 verbunden.
Dann gibt es für die (2n-2) Punkte $P_3, \ldots, P_{2n}$ genau A_{n-1} verschiedene Sehnenmengen der geforderten Art.

(2) Sei k eine der Zahlen $2,\dots,n-1$, und sei P_1 mit P_{2k} verbunden. (Im Fall $n=2$ entfällt diese Möglichkeit.) Dann gibt es einerseits für die $(2k-2)$ Punkte $P_2,\dots,P_{2k-1}$ genau A_{k-1} verschiedene Sehnenmengen M der geforderten Art, andererseits für die $(2n-2k)$ Punkte $P_{2k+1},\dots,P_{2n}$ genau A_{n-k} verschiedene Sehnenmengen M' der geforderten Art.
Durch Zusammenstellen je einer beliebigen Sehnenmenge M mit je einer beliebigen Sehnenmenge M' erhält man alle diejenigen Sehnenmengen für $P_1,\dots,P_{2n}$, bei denen P_1 mit P_{2k} verbunden ist. Deren Anzahl ist somit $A_{n-k}\cdot A_{k-1}$.

(3) Sei P_1 mit P_{2n} verbunden. Dann gibt es für die $(2n-2)$ Punkte $P_2,\dots,P_{2n-1}$ genau A_{n-1} verschiedene Sehnenmengen der geforderten Art.

Damit ist insgesamt ermittelt:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}\cdot A_1 + A_{n-3}\cdot A_2 + \dots + A_1\cdot A_{n-2} + A_{n-1}. \qquad (++)$$

(Im Fall $n=2$ reduziert sich (++) auf $A_n = A_{n-1} + A_{n-1}$.)[1]

c) Aus $A_1 = 1$ und (++) folgt der Reihe nach

$A_2 = 1 + 1 = 2,$

$A_3 = 2 + 1\cdot 1 + 2 = 5,$

$A_4 = 5 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5 = 14,$

$A_5 = 14 + 5\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + 14 = 42.$

---

1 Man kann in (++) die Sonderrolle der Summanden A_{n-1} (und ihrer Herleitung in (1),(3)) sowie des Falles $n=2$ durch eine zusätzliche Definition $A_0 = 1$ vermeiden.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 12 Gesamtpunktzahl: 40

221221

Für I:	7 Punkte
Für II:	2 Punkte
	9 Punkte

Tritt bei einer Schülerlösung eine Division auf (z. B. $x = \frac{5}{y+z}, \ldots$) und fehlen dabei Erörterungen darüber, daß die Divisoren möglicherweise gleich Null sein könnten (siehe Hinweis am Abschluß der Lösung), so sind 2 Punkte abzuziehen.

221222

Für I:	5 Punkte
Für II:	5 Punkte
	10 Punkte

Ferner ist der Hinweis auf Punktabzug am Abschluß der Lösung zu beachten.

221223

$v = dxy$	4 Punkte
Restliche Schritte bis $d+v \geqq a+b$	4 Punkte
((Bei anderem Lösungsweg:	
$(a-d)(b-d) \geqq 0$	4 Punkte
Restliche Schritte	4 Punkte))
Untersuchung des Falls $d+v = a+b$	2 Punkte
	10 Punkte

221224

a)	3 Punkte
b)	6 Punkte
c)	2 Punkte
	11 Punkte