XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>221041</u>
Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

<u>221042</u>
In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x;y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x;y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

<u>221043A</u>
a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$a^x = b \cdot \cos x \qquad (1)$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).

Geben Sie ein solches Paar $(a;b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, daß es die genannte Eigenschaft besitzt!

b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a;b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g+1$ gilt!

c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, daß für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?

Hinweise:

1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalen genau $\pi = 3,1316$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

221043B

Fünf Kugeln $K_1,\dots,K_5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, daß jede Kugel genau zwei andere berührt und daß ihre Mittelpunkte $M_1,\dots,M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1,\dots,K_5$.

Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1,\dots,M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

A 10;II XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

221044

Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

221045

Beweisen Sie, daß die Gleichung
$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$
genau zwei reelle Lösungen hat!

221046

Beweisen Sie, daß sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

221041) Lösung: 6 Punkte

Zum Beweis genügt es, für beliebiges natürliches $n \geqq 2$ jeweils ein Beispiel natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ anzugeben und bei diesen die genannte Eigenschaft zu bestätigen. Ein solches Beispiel bilden zu n jeweils $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = n$; denn für diese Zahlen gilt

$$a_1 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n .$$

221042) Lösung: 6 Punkte

a) Rolfs Meinung ist wahr. Beispielsweise bilden $x = (3n)^2$, $y = (4n)^2$ für $n = 1,2,3,\ldots$ unendlich viele Paare $(x;y)$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, und für sie ist $x+y = 9n^2 + 16n^2 = (5n)^2$, also

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = 3n + 4n + 5n \text{ rational.}$$

b) Evas Meinung ist ebenfalls wahr. Beispielsweise bilden $x = n^2$, $y = 8n$ für $n = 1,2,3,\ldots$ unendlich viele Paare $(x;y)$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, und für sie ist $x+y = 9n^2$, also

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = n + 2\sqrt{2} + 3n.$$

Wäre nun z rational, so wäre wegen $n \neq 0$ auch $\sqrt{2} = \frac{z-4n}{2n}$ rational. Da dies ein Widerspruch ist, muß z irrational sein.

221043A) Lösung: 7 Punkte

Es seien f und g die durch $f(x) = a^x$ bzw. $g(x) = b \cdot \cos x$ für alle $x \geqq 0$ definierten Funktionen (sofern $a > 0$ ist). Eine positive reelle Zahl x ist genau dann Lösung von (1), wenn sie $f(x) = g(x)$ erfüllt, d. h. Abszisse eines Schnittpunktes der Graphen von f und g ist.

a) Man wähle $a > 1$ und b so, daß

$$a^{1982\pi} < b < a^{1983\pi} \qquad (2)$$

gilt. Dann folgt: In allen Intervallen

$$[2k\pi; 2k\pi + 2\pi) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,990)$$

verläuft f(x) stets zwischen 0 und $a^{1982\pi}$, also erst recht zwischen 0 und b.

Aus dem Verlauf der Graphen von f und g (Abb. L 221043Aa) ergibt sich daher, daß sie in diesem Intervall genau zwei Schnittpunkte haben.
Wegen $0 < f(1982\pi) < b$ folgt ferner (Abb. L 221043Ab), daß im Intervall

$$[1982\pi ; 1983\pi)$$

genau ein weiterer Schnittpunkt existiert.

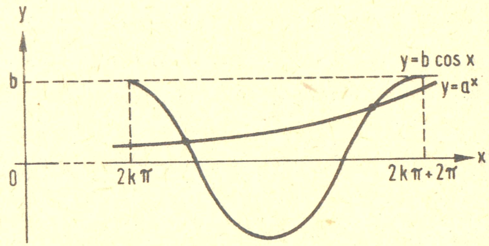

Abb. L 221043Aa

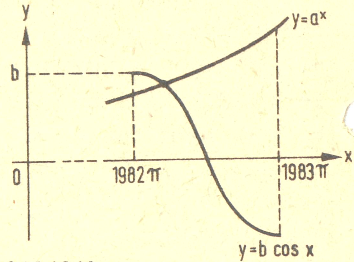

Abb. L 221043Ab

Für alle $x \geqq 1983\pi$ schließlich ist $f(x) \geqq a^{1983\pi} > b \geqq g(x)$; daher haben die Graphen von f und g im Intervall

$$[1983\pi ; +\infty)$$

keinen Schnittpunkt.
Folglich hat (1) wie gefordert 1983 positive Lösungen, wenn man a und b wie in (2) wählt. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:
Nach dem Hinweis gilt $3{,}141 < \pi < 3{,}142$. Daraus folgt

$$1982\pi < 1982 \cdot 3{,}142 = 6227{,}444$$

und $1983\pi > 1983 \cdot 3{,}141 = 6228{,}604$,
also erst recht $1982\pi < 6228 < 1983\pi$. Somit haben etwa $a = 2$ und $b = 2^{6228}$ die genannte Eigenschaft.

b) Für dieses Paar (a;b) ist beispielsweise diejenige Lösung x_0 von (1), die (nach Abb. L 221043Aa mit $k = 0$) im Intervall $(0;\frac{\pi}{2})$ liegt, größer als 1; denn wegen $f(1) = a = 2$ und $g(1) > g(\frac{\pi}{3}) = b \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2^{6228} \cdot \frac{1}{2}$ ist $f(1) < g(1)$ (sowie $f(\frac{\pi}{2}) > 0 = g(\frac{\pi}{2})$). Daher gilt $1 < x_0 < \frac{\pi}{2} < 2$ und somit $[x_0] = 1$.

c) Eine Zahl mit den genannten Eigenschaften gibt es; sogar jede Zahl a mit $0 < a < 1$ hat diese Eigenschaften. Aus

$0 < a < 1$ folgt nämlich[1] für jedes $b \neq 0$ die Existenz einer natürlichen Zahl n mit $a^{2n\pi} < |b|$. In allen Intervallen $[\,2k\pi\ ;\ 2k\pi + 2\pi\,)$ mit $k \geqq n$ liegt dann f(x) zwischen 0 und $a^{2k\pi} \leqq a^{2n\pi} < |b|$. Sowohl im Fall $b > 0$ (Abb. L 221043Ac) als auch im Fall $b < 0$ (Abb. L 221043Ad) folgt daraus die Existenz von Nullstellen in den genannten unendlich vielen Intervallen.

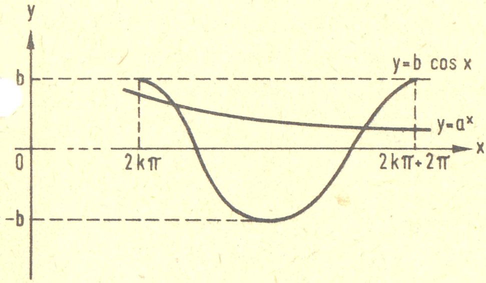

Abb. L 221043Ac

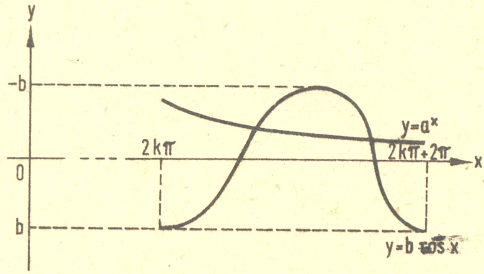

Abb. L 221043Ad

Hinweis zur Korrektur: Für die meisten hier herangezogenen Aussagen ist auch eine Herleitung ohne Berufung auf die Anschauung relativ leicht möglich, unter Berufung auf den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und auf das Monotonieverhalten von f und g. Lediglich die in a) benötigte Eindeutigkeitsaussage für Schnittpunkte in Intervallen, in denen f und g beide steigend sind, erfordert weitere Hilfsmittel (z. B. Konvexitätsaussagen), die von Schülern der Klasse 10 nicht zu erwarten sind.

221043B) Lösung: 7 Punkte

Das regelmäßige Fünfeck $M_1 \ldots M_5$ hat die Seitenlänge $s = 2r$, sein Mittelpunkt sei Q, sein Umkreisradius $\varrho = \overline{QM_1} = \ldots = \overline{QM_5}$ (Abb. L 221043Ba). Um s durch ϱ auszudrücken, kann man das Fünfeck zum regelmäßigen Zehneck $M_1P_1M_2P_2 \ldots M_5P_5$ ergänzen, dessen Seitenlänge z genannt sei:

Ist M_1T Winkelhalbierende im Dreieck QM_1P_1, so folgt

---

1 Diese Aussage kann als bekannt, z. B. wegen $\lim\limits_{m \to \infty} a^m = 0$, zitiert oder z. B. wegen $\lg a < 0$ durch $n > \frac{\lg |b|}{2\pi \lg a}$ bewiesen werden.

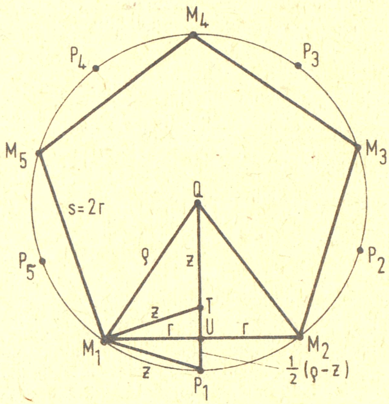

Abb. L 221043Ba

$\overline{\sphericalangle M_1QP_1} = \overline{\sphericalangle QM_1T} = \overline{\sphericalangle TM_1P_1} = 36^\circ$,
$\overline{QT} = \overline{M_1T} = \overline{M_1P_1} = z$,
$\triangle QM_1P_1 \sim \triangle M_1P_1T$,
$\overline{QM_1} : \overline{M_1P_1} = \overline{M_1P_1} : \overline{P_1T}$,
$\varrho : z = z : (\varrho - z)$,

$$\varrho z = \varrho^2 - z^2. \qquad (1)$$

QP_1 halbiert den Winkel $\sphericalangle M_1QM_2$ und schneidet daher die Strecke M_1M_2 senkrecht in ihrem Mittelpunkt U, der seinerseits P_1T halbiert.

Daraus und aus (1) folgt

$$s^2 = 4r^2 = 4\overline{M_1U}^2 = 4(\overline{M_1P_1}^2 - \overline{UP_1}^2) =$$
$$= 4z^2 - (\varrho - z)^2 =$$
$$= 3z^2 - \varrho^2 + 2\varrho z \qquad (2)$$
$$= z^2 + \varrho^2. \qquad (3)$$

Wegen $\overline{M_1M_6} = \ldots = \overline{M_5M_6} = 2r = s$ ist Q der Fußpunkt des Lotes von M_6 auf die Ebene e durch $M_1, \ldots, M_5$.

Für die Länge $h = \overline{QM_6}$ dieses Lotes gilt daher (Abb. L 221043Bb)

$$s^2 = h^2 + \varrho^2. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $h = z$.

Da $\overline{M_1P_1} > \overline{M_1U}$, d. h. $z > r$ gilt, ist damit

$$h > r \qquad (5)$$

bewiesen. Daher wird e von K_6 nicht erreicht.

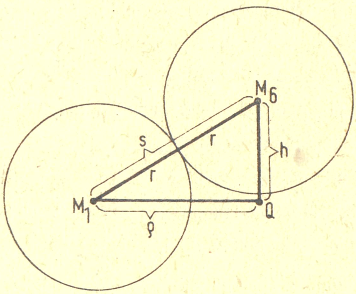

Abb. L 221043Bb

L 10;II XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>221044)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende CD zugleich Höhe und Winkelhalbierende. Setzt man $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$, so ist also $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD} = 90^\circ - \beta$. Die Parallele durch A zu DD' schneidet die Gerade durch B und C in einem Punkt A'. Wegen DD' $\perp$ BC ist dann einerseits $\overline{\sphericalangle CDD'} = \beta$, andererseits $\overline{\sphericalangle BA'A} = 90^\circ$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und daher $\overline{\sphericalangle BAA'} = 90^\circ - \beta$.

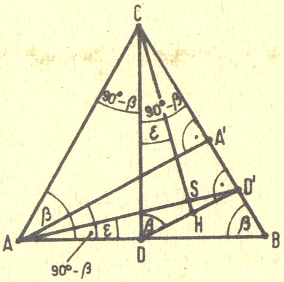

Abb. L 221044

Nach dem Strahlensatz ist ferner D' der Mittelpunkt von A'B. Aus dem Hauptähnlichkeitssatz folgt
$\triangle DCD' \sim \triangle BAA'$ und damit $\overline{DD'} : \overline{DC} = \overline{BA'} : \overline{BA}$.
Somit gilt auch $\overline{DH} : \overline{DC} = \overline{BD'} : \overline{BA}$ und nach dem Ähnlichkeitssatz (sws) folglich $\triangle DCH \sim \triangle BAD'$. Setzt man $\overline{\sphericalangle BAD'} = \varepsilon$, so ist also auch $\overline{\sphericalangle DCH} = \varepsilon$. Für den Schnittpunkt S von AD' und CH gilt demnach $\overline{\sphericalangle CAS} = \beta - \varepsilon$ und $\overline{\sphericalangle ACS} = 90^\circ - \beta + \varepsilon$.
Daraus folgt $\overline{\sphericalangle ASC} = 180^\circ - (\beta - \varepsilon) - (90^\circ - \beta + \varepsilon) = 90^\circ$, w.z.b.w.

<u>221045)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für die durch $f(x) = x^4+5x^3+6x^2-4x-16$ definierte Funktion f gilt $f(-4) = 32$, $f(-3) = -4$, also hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung x_1 zwischen (-4) und (-3). Ferner gilt $f(1) = -8$, $f(2) = 56$, also hat die Gleichung eine Lösung x_2 zwischen 1 und 2.
Wegen $f(x) = (x+2)^4 - 3(x+2)^3 - 8$ ist f im Intervall $(-\infty;-2]$ streng monoton fallend; in diesem Intervall ist daher x_1 die einzige Lösung der Gleichung.

Wegen $f(x) = (x-1)^4 + 9x^3 - 17$ ist f im Intervall $[1;+\infty)$ streng monoton steigend; in diesem Intervall ist daher x_2 die einzige Lösung der Gleichung.
Ferner ist $f(x) = (x+1)^4 + x^3 - 8x - 17$. Für $-2 < x < 0$, also $-1 < x+1 < 1$ gilt daher $(x+1)^4 < 1$, $x^3 < 0$, $-8x < 16$ und somit $f(x) < 0$.
Für $0 \leqq x < 1$ schließlich gilt $x^4 < 1$, $5x^3 < 5$, $6x^2 < 6$, $-4x \leqq 0$ und somit ebenfalls $f(x) < 0$.
Also hat die Gleichung $f(x) = 0$ in den Intervallen $(-2;0)$ und $[0;1)$ keine Lösung, und x_1, x_2 sind als insgesamt einzige reelle Lösungen nachgewiesen.

<u>221046) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es sei W = ABCDEFGH ein Würfel der Kantenlänge a. Zunächst ist ACFH ein regelmäßiges Tetraeder der Kantenlänge $\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{AH} = \overline{FH} = \overline{HC} = \overline{CF} = a\sqrt{2}$.
Durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ geht es über in ein (erst recht ganz in W liegendes) Tetraeder AC'F'H' der Kantenlänge a; dabei sind also C', F', H' auf AC, AF bzw. AH im Abstand a von A gelegen.

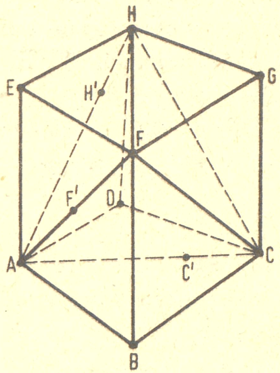

Abb. L 221046

Der Schwerpunkt S des Dreiecks CFH liegt auf der Körperdiagonalen AG des Würfels, die Ebene e durch C, F, H steht senkrecht auf AG; denn es gibt eine Drehung um AG, die C in F, F in H und H in C überführt, also S und e festläßt.
Daraus folgt: Auch der Schwerpunkt des Dreiecks C'F'H' liegt auf AG, und die Ebene e' durch C', F', H' steht senkrecht auf AG. Ferner hat das Tetraeder AC'F'H' die Höhenlänge $h' = \frac{1}{3}a\sqrt{6} < \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{2}\overline{AG}$.

Daraus ergibt sich: Spiegelt man A an e', so erhält man einen Punkt A" auf AG. Für ihn ist A"C'F'H' ebenfalls ein regelmäßiges Tetraeder der Kantenlänge a. Es liegt (wie seine vier Eckpunkte) in W; und es hat mit dem Tetraeder AC'F'H' nur die Fläche des

Dreiecks C'F'H' gemeinsam, durchdringt dieses also nicht.
Damit ist der geforderte Beweis geführt.