XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

221031

Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x,y,z,u,v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leqq y \leqq z \leqq u \leqq v$$

und $$x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

221032

Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, daß M nicht auf der Geraden g durch A,B liegt.

Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!

Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\sphericalangle APB$ halb so groß ist wie $\sphericalangle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

221033

Beweisen Sie, daß $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

A 10;II

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

221034

Beweisen Sie folgende Aussage:
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, daß je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

221035

Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

221036

Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, daß es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt! Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

221031) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Quintupel natürlicher Zahlen die geforderten Eigenschaften hat, so folgt $x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v = x+y+z+u+v \leqq 5v$, wegen $v > 0$ also $x \cdot y \cdot z \cdot u \leqq 5$.

Wäre $y \geqq 2$, so folgte $z \geqq 2$, $u \geqq 2$, also der Widerspruch $x \cdot y \cdot z \cdot u \geqq 8$. Daher und wegen $x \leqq y$ ist

$$x = y = 1, \quad z \cdot u \leqq 5.$$

Wäre $z \geqq 3$, so folgte $u \geqq 3$, also der Widerspruch $z \cdot u \geqq 9$. Daher ist $z \leqq 2$. Die folgende Tabelle gibt alle Möglichkeiten an, die hiernach noch für z und dann wegen $u \geqq z$, $z \cdot u \leqq 5$ für u sowie für die Gleichung $x+y+z+u+v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$ und ihre Lösung v verbleiben.

z	u	x+y+z+u+v = xyzuv	v
1	1	$4+v = v$	existiert nicht
1	2	$5+v = 2v$	5
1	3	$6+v = 3v$	3
1	4	$7+v = 4v$	nicht ganzzahlig
1	5	$8+v = 5v$	kleiner als u
2	2	$6+v = 4v$	2

Daher können nur die Quintupel

$$(1,1,1,2,5),\ (1,1,1,3,3),\ (1,1,2,2,2)$$

die geforderten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn es gilt

$1 \leqq 1 \leqq 1 \leqq 2 \leqq 5$, $1 \leqq 1 \leqq 1 \leqq 3 \leqq 3$, $1 \leqq 1 \leqq 2 \leqq 2 \leqq 2$,

$1+1+1+2+5 = 10 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$,

$1+1+1+3+3 = 9 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$,

$1+1+2+2+2 = 8 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Daher haben genau die genannten Quintupel die geforderten Eigenschaften.

221032) Lösung: 6 Punkte

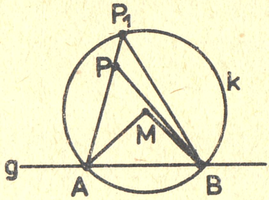

Abb. L 221032a

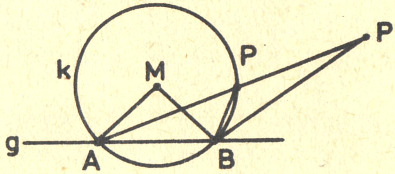

Abb. L 221032b

Angenommen, P läge nicht auf k. Dann gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

1. P liegt im Innern des Kreises k (Abb. L 221032a).
   Dann schneidet die Verlängerung von AP über P hinaus die Kreislinie k in einem Punkt $P_1 \neq P$, und es folgt
   $$\overline{\sphericalangle APB} = \overline{\sphericalangle AP_1B} + \overline{\sphericalangle PBP_1} \quad \text{(Außenwinkelsatz)}$$
   $$> \overline{\sphericalangle AP_1B} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMB} \quad \text{(Satz über Zentri- und Peripheriewinkel)}$$
   im Widerspruch zur Voraussetzung.
2. P liegt außerhalb des Kreises k (Abb. L 221032b).
   Durch eventuelle Vertauschung von A und B läßt sich dann erreichen[1], daß die Kreislinie k die Strecke AP in einem Punkt P_1 zwischen A und P schneidet, und es folgt
   $$\overline{\sphericalangle APB} < \overline{\sphericalangle APB} + \overline{\sphericalangle P_1BP} = \overline{\sphericalangle AP_1B} \quad \text{(Außenwinkelsatz)}$$
   $$= \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMB} \quad \text{(Satz über Zentri- und Peripheriewinkel)}$$
   ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist die Annahme, P läge nicht auf k, widerlegt und folglich der geforderte Beweis geführt.

---

1 Die hier erforderliche genauere Lagediskussion (k schneidet AP genau dann zwischen A und P, wenn P bezüglich der in A an k gelegten Tangente auf derselben Seite wie M liegt) wird nicht vom Schüler verlangt.

221033) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, $z = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ wäre rational, dann folgte

$$\begin{aligned}
\sqrt{7} &= z - (\sqrt{2} + \sqrt{5}), \\
7 &= z^2 - 2z(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + 2 + 2\sqrt{10} + 5, \\
2z(\sqrt{2} + \sqrt{5}) &= z^2 + 2\sqrt{10}, \\
4z^2(7 + 2\sqrt{10}) &= z^4 + 4z^2\sqrt{10} + 40, \\
4z^2\sqrt{10} &= z^4 - 28z^2 + 40.
\end{aligned}$$

Wegen $z > 0$ wäre also auch

$$\sqrt{10} = \frac{z^4 - 28z^2 + 40}{4z^2}$$

rational, im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{10}$.[1]

Somit ist die Annahme, $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ sei rational, auf einen Widerspruch geführt und folglich der geforderte Beweis erbracht.

---

1 Dies kann entweder als bekannter Sachverhalt zitiert oder z. B. wie folgt bewiesen werden: Wäre $\sqrt{10}$ rational, so gäbe es ganze Zahlen m und n mit $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$, und es folgte $10\,n^2 = m^2$. In der Primfaktorenzerlegung der natürlichen Zahl $10\,n^2$ käme aber der Primfaktor 2 in ungerader Anzahl vor; daher kann $10\,n^2$ nicht das Quadrat m^2 einer ganzen Zahl sein.

 XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

221034) Lösung: 7 Punkte

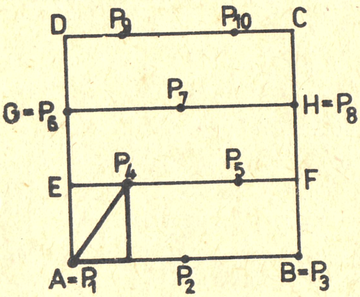

Abb. L 221034

Zum Beweis genügt es, ein Beispiel für zehn Punkte anzugeben und die geforderte Eigenschaft für sie nachzuweisen. Ein solches Beispiel ist das folgende:

In einem Quadrat ABCD der Seitenlänge a seien E,G auf AD und F,H auf BC diejenigen Punkte, für die $\overline{AE} = \overline{AG} = \overline{GD} = \frac{a}{3}$ und $AB \parallel EF \parallel GH \parallel DC$ gilt. Auf den Strecken AB und GH wähle man

$P_1 = A$, P_2 als Mittelpunkt von AB, $P_3 = B$,

$P_6 = G$, P_7 als Mittelpunkt von GH, $P_8 = H$.

Auf den Strecken EF und DC wähle man

P_4, P_5 mit $\overline{EP_4} = \frac{a}{4}$, $\overline{P_5F} = \frac{a}{4}$, also $\overline{P_4P_5} = \frac{a}{2}$,

P_9, P_{10} mit $\overline{DP_9} = \frac{a}{4}$, $\overline{P_{10}C} = \frac{a}{4}$, also $\overline{P_9P_{10}} = \frac{a}{2}$.

Für diese zehn Punkte $P_1,\dots,P_{10}$ gilt dann:

1. Je zwei auf derselben der vier Strecken AB,EF,GH,DC gelegene Punkte P_i,P_j haben voneinander mindestens den Abstand $\frac{a}{2} > \frac{2}{5}a$.
2. Je zwei auf einander nicht benachbarten der vier Strecken AB,EF,GH,DC gelegene Punkte P_i,P_j haben voneinander mindestens den Abstand $\frac{2}{3}a > \frac{2}{5}a$.
3. Je zwei auf benachbarten der vier Strecken AB,EF,GH,DC gelegene Punkte P_i,P_j haben voneinander einen Abstand, der mindestens so groß ist wie die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen $\frac{a}{3}$ und $\frac{a}{4}$, also mindestens so groß wie

$$\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{16}} = \sqrt{\frac{16a^2}{144} + \frac{9a^2}{144}} = \frac{5}{12}a > \frac{2}{5}a.$$

Daher haben die angegebenen zehn Punkte die geforderte Eigenschaft.

221035) Lösung: 7 Punkte

Ist $x \geqq -1$, so gilt $x+1 \geqq 0$, also $1978(x+1) \geqq 0$ und daher erst recht

$$1978x + 1980 > 0. \quad (1)$$

Wegen $x^2 \geqq 0$ gilt ferner $x^2(x+1) \geqq 0$, also $1979(x^3+x^2) \geqq 0$ und daher, nochmals wegen $x^2 \geqq 0$, erst recht

$$1979x^3 + 1982x^2 \geqq 0. \quad (2)$$

Aus (1),(2) und $1981x^4 \geqq 0$ folgt $f(x) > 0$.

Ist $x < -1$, so gilt $x+1 < 0$ sowie $x < 0$, also $1978x(x+1) > 0$ und daher wegen $x^2 > 0$ erst recht

$$1982x^2 + 1978x > 0. \quad (3)$$

Ferner gilt $1979x^2 \cdot x(x+1) > 0$ und daher wegen $x^4 > 0$ erst recht

$$1981x^4 + 1979x^3 > 0. \quad (4)$$

Aus (3),(4) und $1980 > 0$ folgt $f(x) > 0$.

Also gilt $f(x) > 0$ für alle reellen x; die Funktion f hat folglich keine Nullstelle.

Bemerkung: Es gilt sogar $f(x) > 1335$ für alle reellen x.

221036) Lösung: 6 Punkte

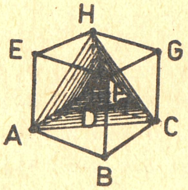

Abb.L22 1036a

(I) Ist W = ABCDEFGH ein Würfel der Kantenlänge a (Abb. L 221036a), so kann aus ihm ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge $b_0 = a\sqrt{2}$ herausgeschnitten werden.

Beweis: T_0 = ACFH ist wegen $\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{AH} = \overline{FH} = \overline{HC} = \overline{CF} = a\sqrt{2}$ ein solches Tetraeder.

(II) Jedes aus W herausgeschnittene reguläre Tetraeder

$$T = P_1P_2P_3P_4 \text{ hat eine Kantenlänge } b \leqq b_0.$$

Beweis: Verbindet man in T jeweils eine Ecke P_i mit dem Schwerpunkt S_i der Gegenseite, so gehen diese vier Strecken P_iS_i durch einen Punkt Z, den Mittelpunkt von T. Er hat von allen vier P_i den selben Abstand

$$r = \overline{ZP_1} = \overline{ZP_2} = \overline{ZP_3} = \overline{ZP_4}. \quad (1)$$

Speziell für das Tetraeder T_0 aus (I) fällt Z mit dem Mittelpunkt M (dem Schnittpunkt der vier Körperdiagonalen AG,BH,CE,DF) von W zusammen; denn A und der Schwerpunkt S des Dreiecks CFH liegen auf AG (da es eine Drehung um AG gibt, die C in F, F in H, H in C überführt, also S festläßt), und Entsprechendes gilt für BH,CE und DF. Der in (1) genannte Abstand wird speziell für T_0 also gleich dem Umkugelradius

$$r_0 = \overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MF} = \overline{MH}$$

von W; damit gilt

$$\overline{MP} \leqq r_0 \qquad (2)$$

für alle Punkte P, die im Innern oder auf dem Rand des Würfels W liegen. Da für reguläre Tetraeder zu größeren Werten von r auch größere Werte von b gehören, ist die Behauptung $b \leqq b_0$ bewiesen, wenn man $r \leqq r_0$ gezeigt hat. Wegen (1),(2) genügt es hierzu,

$$\overline{ZP_i} \leqq \overline{MP_i} \qquad (3)$$

für mindestens einen der Eckpunkte P_i von T nachzuweisen.

Im Fall Z = M gilt (3) sogar für alle P_i. Im Fall $Z \neq M$ betrachte man die zu ZM senkrechte Ebene e durch Z (Abb. L 221036b) und denjenigen von e begrenzten Halbraum h, der M enthält. Er kann nicht alle vier Punkte P_i enthalten, da sonst das gesamte Tetraeder $T = P_1P_2P_3P_4$ in h läge und folglich sein innerer Punkt Z nicht auf dem Rande e von h. Also liegt mindestens ein P_i nicht in h; für dieses folgt $\overline{\sphericalangle MZP_i} \geqq 90^\circ$ und damit (3).

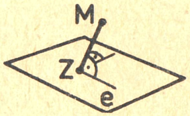

Abb. L 221036b

Mit (I) und (II) ist bewiesen: Es gibt ein Tetraeder der genannten Art mit möglichst großer Kantenlänge; diese beträgt $a\sqrt{2}$.

<u>Hinweis:</u> Bei der Einschätzung anderer Lösungsansätze (die für diese Aufgabe in stärkerer Breite und mit unterschiedlichem Erfolg auftreten könnten) sollte ein Rückgriff auf anschaulich motivierte räumlich-geometrische Schlüsse etwa in dem Maße akzeptiert werden, wie es der vorliegende Lösungstext aufweist (Symmetrieeigenschaften von Würfel und regelmäßigem Tetraeder; Anordnungsaussagen für Punkte, Geraden und Ebenen im Raum). Dagegen ist die Vollständigkeit betrachteter Fälle sowie der logischen Darstellung (wie Existenz eines T_0 mit b_0, Nachweis $b \leqq b_0$ für alle T) maßgeblich in die Bewertung einzubeziehen.