XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

221021

Man ermittle alle diejenigen Paare (x;y) ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

221022

Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, daß in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:

1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.

Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b: "Wenn $a \neq b$ ist, dann muß sogar stets $a > b$ gelten."
Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

221023

Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:

(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.

(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2.

A 10

Beweisen Sie, daß es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und daß die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind! Geben Sie diese Seitenlängen an!

<u>221024</u>

Es sei ABCDEF ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

221021) Lösung: 9 Punkte

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllt, so gilt

$x\,(2x^2 + y) = 7.$

Da x und $2x^2+y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

entweder $x = 1$ und $2x^2 + y = 7$ (1)

oder $x = 7$ und $2x^2 + y = 1$ (2)

oder $x = -1$ und $2x^2 + y = -7$ (3)

oder $x = -7$ und $2x^2 + y = -1$. (4)

Aus (1) folgt $y = 5$; aus (2) folgt $y = -97$; aus (3) folgt $y = -9$; aus (4) folgt $y = -99$.

Also können höchstens $(1;5)$, $(7;-97)$, $(-1;-9)$, $(-7;-99)$ Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Gleichung; denn es gilt

$2\cdot 1 + 1\cdot 5 - 7 = 2 + 5 - 7 = 0$

und $2\cdot 343 + 7\cdot(-97) - 7 = 686 - 679 - 7 = 0$

und $2\cdot(-1) + (-1)(-9) - 7 = -2 + 9 - 7 = 0$

und $2\cdot(-343) + (-7)(-99) - 7 = -686 + 693 - 7 = 0.$

Folglich haben genau die genannten Zahlenpaare die geforderten Eigenschaften.

221022) Lösung: 9 Punkte

Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt. Für sie gilt $a \geqq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c \geqq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a \geqq b$, für $a \neq b$ also sogar $a > b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

221023) Lösung: 11 Punkte

Ein Dreieck mit den Maßzahlen a,b,c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklig mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

gilt. Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus die Gleichungen

$$a + b + c = 132 \tag{4}$$

und $a^2 + b^2 + c^2 = 6050$ (5)

gelten.

I. Wenn (3),(4),(5) erfüllt sind, so folgt:
Nach (3) und (5) gilt $2c^2 = 6050$, $c^2 = 3025$, wegen $c > 0$ also $c = 55$ und damit nach (4) und (3)

$$a + b = 77, \tag{6}$$

$$a^2 + b^2 = 3025. \tag{7}$$

Aus (6) folgt $b = 77 - a$ und damit aus (7)

$$a^2 + (77 - a)^2 = 3025,$$

$$a^2 - 77a + 1452 = 0. \tag{8}$$

Wegen $\frac{77^2}{4} - 1452 = \frac{121}{4} > 0$ folgt aus (8)

$$a = \frac{77}{2} \pm \frac{11}{2},$$

d. h. entweder $a = 44$ und nach (6) dann $b = 33$
oder $a = 33$ und nach (6) dann $b = 44$.
Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1),(2) genügen.

II. Sie genügen ihnen; denn mit

$$33^2 + 44^2 = 11^2(9 + 16) = 55^2,$$

$$33 + 44 + 55 = 132,$$

$$33^2 + 44^2 + 55^2 = 11^2(9 + 16 + 25) = 6050$$

sind (3),(4),(5) erfüllt.

Damit ist der geforderte Beweis geführt. Die Seitenlängen betragen 33 cm, 44 cm und 55 cm.

221024) Lösung: 11 Punkte

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; daher ist $F_1 = 6D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

L 10

Jede der Seitenlängen des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Daher ist $s = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{EA} = a\sqrt{3}$ und folglich $F_2 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} =$
$= \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.
Wegen $\overline{\sphericalangle BAD} = 60^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ABC} = 2 \cdot 60^\circ$ ist AD $\parallel$ BC (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen). Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen 2a bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1; daher ist

$t = \overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_1} = \frac{3}{2}a$ und folglich

$$F_3 = \frac{t^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}.$$

Somit gilt $F_1 : F_2 : F_3 = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{9}{16} = 8 : 4 : 3$

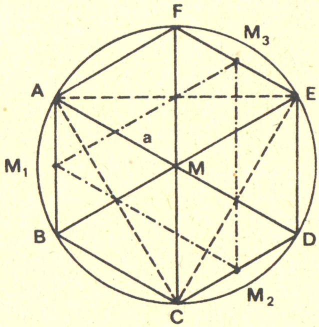

Abb. L 221024

<u>Empfehlung</u> für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

221021

Zerlegen durch Ausklammern	2 Punkte
Angabe von vier Möglichkeiten für x	2 Punkte
Berechnung von y für jeden dieser Fälle	3 Punkte
Angabe der vier möglichen Paare	1 Punkt
Überprüfen aller Bedingungen für diese Paare	2 Punkte
	10 Punkte

221022

Erkennen der Bedeutung von c	3 Punkte
Erkennen, daß $a \geqq c$	1 Punkt
Erkennen, daß $c \geqq b$	1 Punkt
Erkennen, daß $a \geqq b$	1 Punkt
Betrachten des Falles $a=b$ mit Existenznachweis	2 Punkte
Entscheidung	1 Punkt
	9 Punkte

221023

Aussagen (3), (4) und (5) und	
Berechnung von c	3 Punkte
Berechnung von a und b	4 Punkte
Angabe der möglichen Seitenlängen	1 Punkt
Probe	2 Punkte
	10 Punkte

221024

Angabe von F_1 in Abhängigkeit von a	1 Punkt
Seitenlänge des Dreiecks ACE in Abhängigkeit von a	1 Punkt
Angabe von F_2 in Abhängigkeit von a	2 Punkte
Seitenlänge des Dreiecks $M_1M_2M_3$ in Abhängigkeit von a	3 Punkte
Angabe von F_3 in Abhängigkeit von a	2 Punkte
Bilden des geforderten Verhältnisses	1 Punkt
Angabe durch kleinstmögliche natürliche Zahlen	1 Punkt
	11 Punkte

insgesamt	40 Punkte