XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

220931

Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung

$$z = (a+b)^c$$

erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

220932

Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, daß der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1, k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 bzw. P_2 genannt.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

220933

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße von 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos A,B,C,D,E,F,G,H,J und K.
Sie haben Kraftstoffvorräte von 8;10;6;13;5;13;9;16;6 bzw. 14 Litern bei sich. Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, daß ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus Abb. A 220933 ersichtlich.

A 9;I

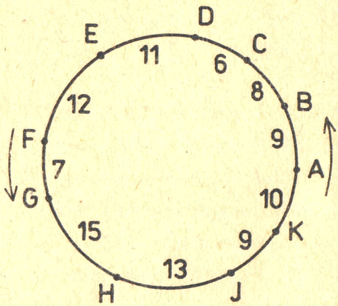

Abb. A 220933

Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, daß es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>220934</u>

Jens behauptet, daß man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

<u>220935</u>

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, daß für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!
<u>Hinweise:</u>
1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z. B. $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$, seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

<u>220936</u>

Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge $\overline{QR}$ in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

L 9;I XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>220931) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Da z dreistellig ist, gilt $z \geqq 100$. Hieraus und aus $z = (a+b)^c$ sowie $a+b \leqq 18$ folgt $c \geqq 2$.

1. Ist $c = 2$, so folgt wegen $(a+b)^2 = z \geqq 100$ zunächst, daß a+b eine der Zahlen 10,11,...,18 ist und daß deren Quadratzahl z die Ziffer c = 2 enthält. Das kann wegen $10^2=100$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$ nur dann zutreffen, wenn z eine der Quadratzahlen 11^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2 ist. Ferner folgt, daß die außer c = 2 in z vorkommenden beiden Ziffern als Summe a+b die Basis der Quadratzahl z haben. Wegen $11^2=121, 1+1\neq 11$, $15^2=225$, $2+5\neq 15$; $16^2=256$, $5+6\neq 16$; $18^2=324$, $3+4\neq 18$ kann daher nur die Möglichkeit $z = 17^2=289$ verbleiben.

2. Ist $c = 3$, so folgt wegen $4^3 < 100 \leqq z = (a+b)^3 < 1000 = 10^3$, daß a+b eine der Zahlen 5,6,...,9 ist und daß deren Kubikzahl z die Ziffer c = 3 enthält. Das kann wegen $5^3=125$, $6^3=216$, $8^3=512$, $9^3=729$ nur zutreffen, wenn $z = 7^3 = 343$ ist.

3. Wäre $c = 4$, so folgte wegen $3^4 < 100 \leqq z = (a+b)^4 < 1000 < 6^4$, daß a+b eine der Zahlen 4, 5 wäre und daß deren vierte Potenz die Ziffer c = 4 enthielte, was weder für $4^4=256$ noch für $5^4=625$ zutrifft.

4. Wäre $c = 5$ oder $c = 6$, so folgte wegen $2^5 < 2^6 < 100 \leqq z = (a+b)^c < 1000 < 4^5 < 4^6$, daß a+b die Zahl 3 wäre und daß deren fünfte bzw. sechste Potenz z die Ziffer c = 5 bzw. c = 6 enthielte, was weder für $3^5=243$ noch für $3^6=729$ zutrifft.

5. Wäre $7 \leqq c \leqq 9$, so folgte wegen $(a+b)^c = z < 1000 < 3^7 \leqq 3^c$ und $a+b \geqq 2$, daß a+b die Zahl 2 wäre und daß deren c-te Potenz die Ziffer c enthielte, was für keine der Zahlen $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$ zutrifft.

Also können nur die Zahlen $z = 17^2 = 289$ und $z = 7^3 = 343$ die geforderten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften, wie aus $289 = (8+9)^2$ und $343 = (3+4)^3$ folgt.
Daher haben genau die Zahlen 289 und 343 die geforderten Eigenschaften.

Bemerkungen zur Korrektur: Die Lösungsteile I,II (Einzigkeitsnachweis, Probe) sind für eine vollständige Lösung erforderlich. Sie brauchen jedoch nicht wie hier getrennt zu sein. Hilfsrechnungen brauchen nicht sämtlich wie hier explizit angegeben zu werden, wenn die Schülerlösung hinreichend deutlich erkennen läßt, daß sie ausgeführt und berücksichtigt wurden.

220932) Lösung: 6 Punkte

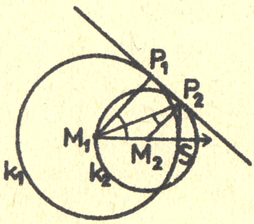

Abb. L 220932

Aus den Voraussetzungen folgt $\overline{\measuredangle P_2M_1M_2} = \overline{\measuredangle M_1P_2M_2}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck $P_2M_1M_2$), d. h. $\overline{\measuredangle P_2M_1S} = \overline{\measuredangle M_1P_2M_2}$.
Ferner gilt $\overline{\measuredangle M_1P_2M_2} = \overline{\measuredangle P_2M_1P_1}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, da M_1P_1 und M_2P_s als Radien auf der gemeinsamen Tangente senkrecht stehen und folglich einander parallel sind.)

Also ist $\overline{\measuredangle P_2M_1S} = \overline{\measuredangle P_2M_1P_1}$. Hieraus und aus $\overline{M_1P_2} = \overline{M_1P_2}, \overline{M_1S} = \overline{M_1P_1}$ folgt $\triangle P_2M_1S \cong \triangle P_2M_1P_1$ (nach sws), also $\overline{\measuredangle M_1SP_2} = \overline{\measuredangle M_1P_1P_2} = 90^\circ$, w.z.b.w.

220933) Lösung: 7 Punkte

In der folgenden Tabelle wird für jedes Auto die Differenz zwischen der vorhandenen Kraftstoffmenge und der zum Erreichen des nächsten Autos erforderlichen Kraftstoffmenge in Litern berechnet. Anschließend werden diese Differenzen schrittweise aufsummiert, jeweils bei einem Auto beginnend und so lange in Fahrtrichtung fortschreitend, bis man entweder zu einer negativen Zwischensumme gelangt oder alle 10 Differenzen addiert hat.

L 9;I

Ist eine dabei erhaltene Zwischensumme nichtnegativ, so gibt sie den Vorrat an Kraftstoff an, den das betreffende Auto noch bei sich hat, nachdem es die bereits in der Rechnung erfaßten Teilstrecken durchfahren hat. Trifft dies für alle 10 erhaltenen Zwischensummen zu, so kann das Auto also die 1000 km in der geforderten Weise durchfahren. Ist aber eine Zwischensumme (- s) negativ, so fehlen dem Auto zum Durchfahren der betreffenden Teilstrecke s Liter Kraftstoff, also kann es dann die 1000 km nicht in der geforderten Weise durchfahren.

Auto	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	A	B	C	D	E	F	G	H	J
vorhandener Vorrat	8	10	6	13	5	13	9	16	6	14	8	10	6	13	5	13	9	16	6
erforderliche Menge bis zum nächsten Auto	9	8	6	11	12	7	15	13	9	10	9	8	6	11	12	7	15	13	9
Differenz	-1	2	0	2	-7	6	-6	3	-3	4	-1	2	0	2	-7	6	-6	3	-3
Zwischensummen, beginnend mit																			
A	-1																		
B		2	2	4	-3														
C			0	2	-5														
D				2	-5														
E					-7														
F						6	0	3	0	4	3	5	5	7	0				
G							-6												
H								3	0	4	3	5	5	7	0	6	0		
J									-3										
K										4	3	5	5	7	0	6	0	3	0

Daraus ist ersichtlich, daß genau die Autos F, H und K die 1000 km in der geforderten Weise durchfahren können.

Umlauf

L 9;II XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

220934) Lösung: 6 Punkte

Bei Division einer Quadratzahl durch 4 können wegen

$n^2 = 4k^2$ für gerade Zahlen $n = 2k$,

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ für ungerade Zahlen $n = 2k + 1$

nur die Reste 0 oder 1 vorkommen. Folglich kann bei Division der Summe zweier Quadratzahlen durch 4 nur einer der Reste

$0+0 = 0$, $0+1 = 1$, $1+0 = 1$, $1+1 = 2$

entstehen. Der Rest 3 kann also nicht auftreten. Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die bei der Division durch 4 den Rest 3 lassen, hat Dirk mit seiner Aussage recht.

Hinweis: Ein Nachweis, daß (gewisse) natürliche Zahlen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen, ist zu einer vollständigen Lösung der vorliegenden Aufgabe nicht erforderlich.

220935) Lösung: 7 Punkte

Die Großkreise k_1 und k_2 seien der Schnitt der Kugeloberfläche mit den Ebenen e_1 bzw. e_2. Dann liegen P, Q und der Mittelpunkt der Kugel auf der Schnittgeraden von e_1 und e_2. Daher ist PQ ein Durchmesser der Kugel, also gilt $\overline{PQ} = 2$.

Ist S = P oder S = Q, so folgt $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2 = 0 + \overline{PQ}^2 = 4$.

Ist $S \neq P$ und $S \neq Q$, so schneidet die durch P,Q und S gelegte Ebene die Kugeloberfläche in einem Kreis mit PQ als Durchmesser, und nach dem Satz von Thales folgt $\overline{\sphericalangle PSQ} = 90^\circ$, nach dem Satz von Pythagoras also $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2 = \overline{PQ}^2 = 4$.

Damit ist der geforderte Beweis geführt; der zu ermittelnde Wert beträgt mithin 4.

220936) Lösung: 7 Punkte

Es sei $x = \overline{PQ}$, $y = \overline{PR}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\overline{\sphericalangle PAQ} = \overline{\sphericalangle BAP}$$
$$= \overline{\sphericalangle QPA} \text{ (Wechselwinkel an den Parallelen AB, PQ)},$$

also ist das Dreieck APQ gleichschenklig mit $\overline{AQ} = \overline{PQ} = x$.

Entsprechend gilt $\overline{BR} = \overline{PR} = y$.

Wegen $QR \parallel AB$ folgt aus dem Strahlensatz

$\overline{CA}:\overline{CB} = \overline{QA}:\overline{RB}$, $b:a = x:y$, $\qquad by = ax$ (1)

und $\overline{CA}:\overline{CQ} = \overline{AB}:\overline{AR}$, $b:(b-x) = c:(x+y)$, $bx + by = bc-cx$. (2)

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt $bx + ax = bc - cx$,

$x = \frac{bc}{a+b+c}$; hieraus und aus (1) folgt $y = \frac{ax}{b} = \frac{ac}{a+b+c}$.

Damit ergibt sich $\overline{QR} = x+y = \frac{(a+b)c}{a+b+c}$.

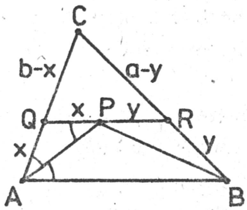

Abb. L 220936