XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

220921

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

(1) $n - 9$ ist eine Primzahl.

(2) $n^2 - 1$ ist durch 10 teilbar.

220922

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$

$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$

$$c = a^2 - (x^2 - y^2 z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

220923

Von einem Quadrat ABCD und vier Punkten P,Q,R,S wird folgendes vorausgesetzt:

(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,

(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,

(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,

(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) Es gilt PR $\perp$ QS.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $\overline{PR} < \overline{QS}$, $\overline{PR} = \overline{QS}$, $\overline{PR} > \overline{QS}$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

<u>220924</u>

Die Abbildung A 220924 zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder a1, a2, a3, a4, ..., e1, e2, e3, e4, e5, zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!

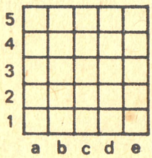


Abb. A 220924

Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

220921) Lösung: **8 Punkte**

I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1),(2) genügt, so folgt: Nach (2) ist die Zahl $(n-1)(n+1)$ durch 10 teilbar, also gerade. Folglich ist (mindestens) eine der Zahlen $n-1$, $n+1$ gerade. Somit ist n ungerade und daher $n-9$ gerade. Da aber 2 die einzige gerade Primzahl ist, so folgt aus (1), daß $n-9 = 2$ und daher $n = 11$ sein muß. Also kann nur die Zahl $n = 11$ den Bedingungen (1),(2) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn für $n = 11$ ist $n-9 = 2$ eine Primzahl, und $n^2-1 = 120$ ist durch 10 teilbar.

Daher genügt genau die Zahl $n = 11$ den Bedingungen (1),(2).

Ein etwas anders formulierter Lösungsansatz besteht darin, aus (2) zu schließen: Die letzte Ziffer von n^2 ist eine 1. Das ist nur möglich, wenn die letzte Ziffer von n eine 1 oder eine 9 ist. Also ist die letzte Ziffer von $n-9$ eine 2 oder eine 0. Damit ist (1) nur durch $n-9 = 2$ erfüllbar usw.

220922) Lösung: **9 Punkte**

Es gilt

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2} = x^2 + y^2 z, \tag{1}$$

$$b = \frac{x^2 + 2xy\sqrt{z} + y^2 z - x^2 + 2xy\sqrt{z} - y^2 z}{2\sqrt{z}} = 2xy, \tag{2}$$

$$c = (x^2 + y^2 z)^2 - (x^2 - y^2 z)^2. \tag{3}$$

Da x,y,z natürliche Zahlen sind, folgt aus (1),(2),(3), daß auch a,b,c natürliche Zahlen sind. Ferner ergibt sich

$$c = 4x^2y^2z = 2xy \cdot 2xyz,$$

$$c = b \cdot 2xyz. \tag{4}$$

Da 2xyz ganzzahlig ist, folgt aus (4), daß b ein Teiler von c ist. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

<u>220923) Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

Aus den Voraussetzungen (1) bis (4) folgt[1]:
Die Strecken PR und QS schneiden sich in einem Punkt E.

Es gilt $\overline{\sphericalangle BPR} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle APE}$ (Nebenwinkel)

$= \overline{\sphericalangle ASQ}$ (Winkelsumme im Viereck APES mit rechten Winkeln bei A und wegen (5) bei E). Nun gibt es nur die folgenden drei Fälle:

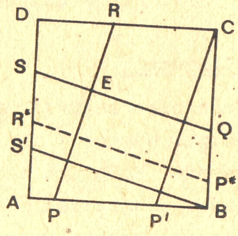


Abb. L 220923

<u>1. Fall:</u> $\overline{\sphericalangle BPR} = 90^\circ$.

In diesem Fall sind BPRC und ASQB Rechtecke. Daher gilt

$\overline{PR} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{QS}$.

2. Fall: $\overline{\sphericalangle BPR} < 90^\circ$.

In diesem Fall schneidet die Parallele durch C zu PR die Strecke PB in einem Punkt P' zwischen P und B, und die Parallele durch B zu QS schneidet die Strecke AS in einem Punkt S' zwischen A und S. Hiernach gilt einerseits

$\overline{\sphericalangle BP'C} = \overline{\sphericalangle BPR}$ (Stufenwinkel)

$= \overline{\sphericalangle ASQ} = \overline{\sphericalangle AS'B}$ (Stufenwinkel)

sowie $\overline{\sphericalangle P'BC} = \overline{\sphericalangle S'AB} = 90^\circ$ und $\overline{BC} = \overline{AB}$, also $\triangle P'BC \cong \triangle S'AB$ (sww) und daher

$\overline{P'C} = \overline{S'B}$. (6)

Andererseits sind PP'CR und SS'BQ Parallelogramme, also ist

$\overline{PR} = \overline{P'C}$ (7)

und $\overline{QS} = \overline{S'B}$. (8)

Aus (6), (7), (8) folgt $\overline{PR} = \overline{QS}$.

---

1 Ein ausführlicher Beweis hierfür wird vom Schüler nicht verlangt. Man kann zum Beweis z. B. heranziehen, daß A,B und folglich P auf der einen, C,D und folglich R auf der anderen Seite der Geraden durch Q,S liegen und daß analog S und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden durch P,R liegen.

<u>3. Fall:</u> $\sphericalangle BPR > 90^\circ$.
In diesem Fall ist $\sphericalangle APR < 90^\circ$. Daher läßt sich wie im 2. Fall, nur mit vertauschten Bezeichnungen, $\overline{PR} = \overline{QS}$ beweisen.
Somit gilt für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, die Aussage $\overline{PR} = \overline{QS}$.

<u>Andere Lösungswege,</u> z. T. ohne die genannte Fallunterscheidung, sind möglich (jedoch ist bei der Korrektur stets zu prüfen, ob der vom Schüler gewählte Lösungsweg alle Lagemöglichkeiten erfaßt).
Zum Beispiel kann man diejenige Drehung betrachten, die A,B,C,D in B,C,D,A überführt. Bei dieser Drehung geht PR wegen (5) in eine zu QS parallele Strecke P^*R^* über. Wegen (1),(3) liegen P^*, R^* auf BC bzw. DA. Daraus und aus (2),(4) folgt $\overline{PR} = \overline{P^*R^*} = \overline{QS}$ (identische Strecken oder Gegenseiten im Parallelogramm P^*QSR^*).

<u>220924) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

I. Wenn eine Markierung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Es trifft nur einer der beiden folgenden Fälle zu:
<u>Fall 1:</u> Das Feld c3 ist markiert.
Dann kann in Zeile 1 nur eines der Felder b1, d1 markiert sein; denn a1 und e1 liegen jeweils in derselben Diagonale und c1 in derselben Spalte mit c3. Durch Spiegelung, die c3 festläßt, kann gegebenenfalls erreicht werden, daß b1 markiert ist.
Hiernach bleibt in Zeile 5 für eine Markierung nur noch d5; denn a5 und e5 liegen jeweils in derselben Diagonale, c5 in derselben Spalte mit c3, und b5 liegt in derselben Spalte mit b1.

In Zeile 2 kann dann nur eines der Felder a2, e2 markiert sein. Das führt auf die beiden Markierungen in Abb. L 220924 a, b. Sie sind voneinander verschieden (im Sinne der Aufgabenstellung), da in Abb. L 220924a solche markierten Felder vorkommen, die an einer Ecke benachbart sind, in Abb. L 220924b dagegen nicht.

<u>Fall 2:</u> Das Feld c3 ist nicht markiert.
Wäre dann auch keines der Felder a1,a5,e1,e5 markiert, so müßte in jeder der beiden Diagonalen eines der Felder b2,b4,d2,d4 markiert sein, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also ist gegebenenfalls durch eine Spiegelung erreichbar, daß a1 markiert ist.

Hiernach kann in der Diagonalen von a5 bis e1 nur eines der Felder b4,d2 markiert sein; gegebenenfalls nach einer Spiegelung, die c3 und a1 festläßt, das Feld b4.
In Zeile 3 kann dann nur eines der Felder d3,e3 markiert sein.
Das führt auf die beiden Markierungen in Abb. L 220924 c, d.
Wie im Fall 1 beweist man, daß sie voneinander verschieden sind. Sie sind auch beide verschieden von beiden Markierungen des Falles 1; denn das (dort markierte und hier nicht markierte) Feld c3 bleibt bei allen Drehungen und Spiegelungen fest, die das Quadrat in sich überführen.

II. Die Markierungen in den Abbildungen L 220924 a bis d erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe.
Daher sind mit diesen Abbildungen alle den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Markierungen angegeben.

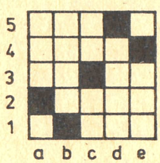
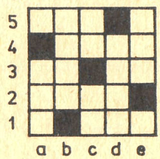
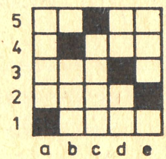


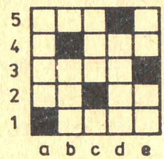
Abb. L 220924a



L 220924b



L 220924c



L 220924d

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

220921

Zerlegung $n^2-1 = (n+1)(n-1)$	2 Punkte
Schlußfolgerung, daß n ungerade ist	2 Punkte
Schlußfolgerung, daß n-9 gerade ist	2 Punkte
Schlußfolgerung, daß nur n=11 in Frage kommt	2 Punkte
Nachweis, daß 11 die Bedingungen erfüllt	1 Punkt
	9 Punkte

220922

Vereinfachung des Quotienten für a, a ist natürlich	2 Punkte
Vereinfachung des Quotienten für b, b ist natürlich	2 Punkte
Substitution für c, c ist natürlich	2 Punkte
Vereinfachung zu $c = b \cdot 2xyz$	2 Punkte
Schlußfolgerung, Nachweis der Teilbarkeit	2 Punkte
	10 Punkte

220923

Fall 1 (Orthogonalität)	1 Punkt
Fall 2: $\sphericalangle BPR < 90^\circ$	
Nachweis der Kongruenz der Dreiecke P'BC und S'AB	
- Kongruenz der Seiten BC und AB	1 Punkt
- Kongruenz der rechten Winkel	1 Punkt
- Kongruenz eines zweiten Winkelpaares	3 Punkte
- Schlußfolgerung mit Kongruenzsatz	1 Punkt
Schluß auf Kongruenz der Seiten P'C und S'B	1 Punkt
Schluß auf Kongruenz der Seiten PR und QS	1 Punkt
Fall 3 $\sphericalangle BPR > 90^\circ$	1 Punkt
Schlußfolgerung	1 Punkt
	11 Punkte

220924

Fall 1 (c3 markiert)	
Angabe der beiden möglichen Markierungen	2 Punkte
Nachweis, daß keine anderen existieren	3 Punkte
Fall 2 (c3 nicht markiert)	
Angabe der beiden möglichen Markierungen	2 Punkte
Nachweis, daß keine weiteren existieren	3 Punkte
	10 Punkte
insgesamt	40 Punkte