L 8;I XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

220831) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn die Angaben für ein Geburtsjahr zutreffen, so folgt: Da der Großvater an einem Tag des Jahres 1981 älter als 65 Jahre und jünger als 100 Jahre war, ist er vor dem entsprechenden Datum des Jahres 1916 und nach dem entsprechenden Datum des Jahres 1881 geboren. Die Jahreszahl seiner Geburt ist also eine der Zahlen 1881, 1882, ..., 1916. Von diesen sind nur die folgenden weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar: 1883, 1889, 1891, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913. Diese Zahlen lassen bei Division durch 60 folgende Reste:

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53.

Hiervon ist nur 49 keine Primzahl. Daher können die Angaben nur für das Geburtsjahr 1909 zutreffen.

II. Sie treffen hierfür zu; denn wenn der Großvater 1909 geboren wurde, so war er an einem Tag des Jahres 1981 entweder 71 oder 72 Jahre alt, also älter als 65 und jünger als 100 Jahre; ferner ist 1909 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar und läßt bei Division durch 60 den Rest 49, der keine Primzahl ist.

Aus I. und II. folgt: Die Angaben können insgesamt zutreffen, und sie legen das Geburtsjahr eindeutig fest. Es lautet 1909.

220832) Lösung: 7 Punkte

Man kann n unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen stets mit jeweils einer geeigneten natürlichen Zahl m

für $n = 2$ in der Form $2m-1,\ 2m+1$,

für $n = 3$ in der Form $2m-1,\ 2m+1,\ 2m+3$,

für $n = 4$ in der Form $2m-3,\ 2m-1,\ 2m+1,\ 2m+3$,

für $n = 5$ in der Form $2m-3,\ 2m-1,\ 2m+1,\ 2m+3,\ 2m+5$

darstellen. Das arithmetische Mittel q dieser Zahlen ist

für $n = 2$ die Zahl $q = \frac{1}{2}\cdot 4m = 2m$, für $n = 3$ die Zahl $q = \frac{1}{3}\cdot(6m+3) = 2m+1$,

für $n = 4$ die Zahl $q = \frac{1}{4}\cdot 8m = 2m$,

für $n = 5$ die Zahl $q = \frac{1}{5}\cdot(10m+5) = 2m+1$.

Wie m sind auch $2m$ und $2m+1$ natürliche Zahlen; damit ist der in a) geforderte Beweis erbracht.
Ferner ist q genau in den Fällen mit $q = 2m$ gerade; also sind genau $n = 2$ und $n = 4$ die in b) zu ermittelnden Zahlen.

220833) Lösung: 8 Punkte

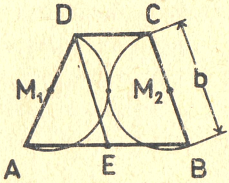

Abb. L 220833

I. Wenn ein Trapez ABCD die geforderten Eigenschaften hat (Abb. L 220833) und E, M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte von AB, AD bzw. BC sind, so folgt:
Wegen $AB \parallel DC$ ist $EB \parallel DC$; nach (2) ist $\overline{AE}=\overline{EB}=\overline{DC}$. Daher ist EBCD ein Parallelogramm; es gilt $\overline{ED} = \overline{BC}$; hiernach und nach (1) ist
$$\overline{AD} = \overline{ED} = b.$$
Ferner ist $\overline{M_1M_2}$ nach (3) gleich der Summe der Radien der genannten Kreise, also wegen (1) gleich $\overline{AD} = \overline{BC} = b$. Andererseits ist M_1M_2 die Mittelparallele des Trapezes ABCD; hieraus und aus (2) folgt $b = \overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) = \frac{3}{2}\overline{DC} = \frac{3}{2}\overline{AE}$,
$$\overline{AE} = \frac{2}{3}b.$$

II. Daher ist ein Viereck ABCD nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(*) Man konstruiert ein Dreieck AED mit $\overline{AD} = \overline{ED} = b$ und $\overline{AE} = \frac{2}{3}b$.

(**) Man verlängert die Strecke AE über E hinaus um ihre eigene Länge bis B.

(***) Man konstruiert die Parallele durch D zu AB und die Parallele durch B zu ED; beide schneiden sich in C.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck ABCD die geforderten Eigenschaften hat:
Nach (***) ist ABCD ein Trapez mit $AB \parallel DC$. Ferner ist EBCD ein Parallelogramm. Hieraus folgt einerseits $\overline{ED} = \overline{BC}$, nach (*)

also $\overline{AD} = \overline{BC} = b$, andererseits $\overline{EB} = \overline{DC}$, nach (∗∗) also $\overline{AB} : \overline{DC} = 2:1$, und zwar nach (∗) $\overline{DC} = \overline{EB} = \overline{AE} = \frac{2}{3}b$, $\overline{AB} = \frac{4}{3}b$.

Folglich hat die Mittelparallele M_1M_2 des Trapezes ABCD die Länge $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}b + \frac{4}{3}b) = b = \overline{AD} = \overline{BC}$. Die Mittelpunkte M_1, M_2 der Kreise mit den Durchmessern AB bzw. BC haben als Abstand voneinander also die Summe der Radien dieser Kreise. Daher berühren sich diese Kreise.

IV. Konstruktionsschritt (∗) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da die Seitenlängen b, b und $\frac{2}{3}b$ alle Dreiecksungleichungen erfüllen. Die Konstruktionsschritte (∗∗) und (∗∗∗) sind dann eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

220834) Lösung: 6 Punkte

Die gesuchte Länge betrage x Kilometer, die Zeiten für den Hin- bzw. Rückflug seien t_1 Stunden bzw. t_2 Stunden. Dann gilt $x = 250\,t_1$ und $x = 200\,t_2$, also

$$t_1 = \frac{x}{250},\quad t_2 = \frac{x}{200}. \qquad (1)$$

Vom Start in A bis zur Ankunft in A vergingen $7\frac{1}{4}$ Stunden; nach Abzug der Wartezeit verbleibt somit eine Flugzeit von

$$(t_1 + t_2)\text{Stunden} = 6\tfrac{3}{4}\text{ Stunden} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{250} + \frac{x}{200} = \frac{27}{4},$$
$$4x + 5x = 27\cdot 250,$$
$$x = 750.$$

Also beträgt die gesuchte Länge 750 km.

220835) Lösung: 7 Punkte

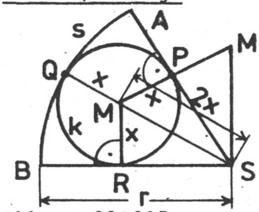

Abb. L 220835

Es sei $r = \overline{AS} = \overline{BS}$. Der Mittelpunkt von k sei M, der Radius von k sei x. Die Berührungspunkte von k mit AS, BS bzw. $\widehat{AB}$ seien P, R bzw. Q. Dann liegt Q auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte S, M, und es gilt

$$\overline{SM} + x = r. \qquad (1)$$

Ferner sind die Radien MP bzw. MR von k senkrecht auf AS bzw. BS. Wegen $\overline{MP} = \overline{MR} = x$ hat also M gleiche Abstände zu AS und BS und liegt folglich auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle ASB$. Also ist $\overline{\sphericalangle PSM} = 30^\circ$. Daher und wegen $\overline{\sphericalangle MPS} = 90^\circ$ gilt nach dem Winkelsummensatz $\overline{\sphericalangle PMS} = 60^\circ$. Hat M bei der Spiegelung an der Geraden durch A,S das Bild M', so ist folglich SMM' ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Höhe SP zugleich Seitenhalbierende, also gilt $\overline{SM} = \overline{MM'} = 2\cdot\overline{MP}$, d. h.

$$\overline{SM} = 2x. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $3x = r$, der Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt also $A_s = \frac{\pi r^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3\pi x^2}{2}$. Der Flächeninhalt des Kreises k ist $A_k = \pi x^2 = \frac{2}{3}A_s$, d. h., A_k beträgt $66\frac{2}{3}$ % von A_s.

220836) Lösung: 6 Punkte

Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel gilt:

$$\overline{\sphericalangle ACB} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMB} \text{ und}$$

$$\overline{\sphericalangle CBD} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle CMD}. \text{ Durch Addition folgt}$$

$$\overline{\sphericalangle ACB} + \overline{\sphericalangle CBD} = \frac{2}{2}(\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD}), \text{ d. h.}$$

$$\overline{\sphericalangle SCB} + \overline{\sphericalangle CBS} = \frac{1}{2}(\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD}).$$

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck BCS, gilt

$$\overline{\sphericalangle ASD} = \overline{\sphericalangle SCB} + \overline{\sphericalangle CBS}.$$

Daher folgt

$$\overline{\sphericalangle ASD} = \frac{1}{2}(\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD}), \text{ w.z.b.w.}$$

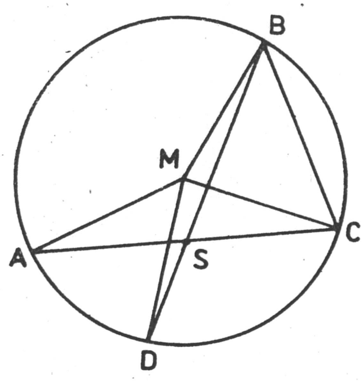

Abb. L 220836