

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
 der Deutschen Demokratischen Republik
 2. Stufe (Kreisolympiade)
 Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

220821

Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht:

- (1) Anke fährt an die Ostsee.
- (2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.

Untersuche

- a) für das Jahr 1981,
 - b) für das Jahr 1982,
- für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln läßt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form "A oder B" ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

220822

In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

	Ja	Nein
(A) Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(B) Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(C) Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(A) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen sollen die Anzahlen derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

- a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,
- b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,
- c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,
- d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

220823

Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

220824

Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

- (1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.
- (2) Die Halbierende des Winkels \sphericalangle BAD schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, daß die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
 2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
 Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die
 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

220821) Lösung: 10 Punkte

1. Lösungsweg:

- a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt:
 Anke fährt an die Ostsee. (3)
 Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) ergibt sich:
 Christine fährt in die Sächsische Schweiz. (4)
 Nach (3) und (4) verbleibt nur noch:
 Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)
 Damit ist bewiesen, daß sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4), (5) angegeben.
- b) Für das Jahr 1982 gilt: Da (1) falsch ist, fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in den Thüringer Wald fahren, so könnte Christine nicht dorthin und Anke nicht in die Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2) dann falsch. Damit ist gezeigt:
 Anke fährt in die Sächsische Schweiz. (6)
 Bereits mit (6) ist erreicht, daß (1) falsch und (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der beiden nach (6) noch möglichen Verteilungen der Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit ist für 1982 bewiesen:
 Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel von Anke läßt sich dagegen eindeutig ermitteln, es lautet, wie in (6) angegeben.

2. Lösungsweg:

Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Verteilungen der drei Reiseziele auf die drei Schülerinnen. Anschließend ist für jede Verteilung angegeben, ob (1) und (2) wahr oder falsch sind.

Verteilung Nr.	Reiseziel von			Wahrheitswert von	
	A	B	C	(1)	(2)
1	O	S	T	w	w
2	O	T	S	w	f
3	S	O	T	f	w
4	S	T	O	f	w
5	T	O	S	f	f
6	T	S	O	f	f

Daraus ist ersichtlich:

- a) Die für 1981 genannten Wahrheitswerte treten genau bei der Verteilung Nr. 2 auf. Also lassen sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln; sie lauten wie in Verteilung Nr. 2 angegeben.
- b) Die für 1982 genannten Wahrheitswerte treten genau bei den Verteilungen Nr. 3 und 4 auf. Darin kommt für Anke stets das Reiseziel Sächsische Schweiz vor; dies läßt sich also eindeutig ermitteln. Für Birgit dagegen treten verschiedene Reiseziele auf, ebenso für Christine. Die Reiseziele dieser beiden Schülerinnen lassen sich folglich nicht eindeutig ermitteln.

220822) Lösung:

10 Punkte

Die gesuchten Eintragungen können durch folgende Rechenschritte gefunden werden:

Angabe Nr.	Gesuchte Antworten	Folgerung aus Angaben Nr.	Berechnung der Anzahl
8	(A)Ja, (B)Ja, (C)Nein	4,7	$8-3 = 5$
9	(A)Ja, (B)Nein, (C)Ja	6,7	$10-3 = 7$
10	(A)Nein, (B)Ja, (C)Ja	5,7	$12-3 = 9$
11	(A)Ja, (B)Nein, (C)Nein	1,7,8,9	$20-3-5-7 = 5$
12	(A)Nein, (B)Ja, (C)Nein	2,7,8,10	$25-3-5-9 = 8$
13	(A)Nein, (B)Nein, (C)Ja	3,7,9,10	$30-3-7-9 = 11$
Aufgabe			
a)	Keinmal Ja	7, ..., 13	$50-3-5-7-9-5-8-11=2$
b)	Genau einmal Ja	11,12,13	$5+8+11 = 24$
c)	(A)Ja und (B)Nein	9,11	$7+5 = 12$
d)	(A)Ja oder (C)Ja oder beides	7, ..., 11, 13	$3+5+7+9+5+11 = 40$

L 6

Andere Darstellungen des Lösungs-
weges, z. B. in Textformulierung
oder mit einem Mengendiagramm
(Abb. L 220822), sind ebenfalls
möglich und zulässig.

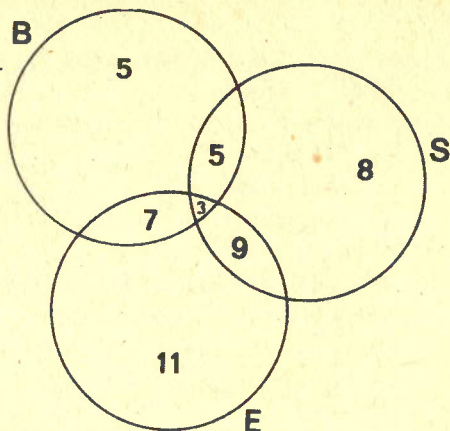


Abb. L 220822

220823) Lösung:

10 Punkte

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck.
Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M
und berühre die Seiten BC , CA bzw.
 AB in P , Q bzw. R . Dann ist
 $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = u$ und $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = \varrho$.
Ferner gilt nach dem Satz über Tan-
gente und Berührungsradius $MP \perp BC$,
 $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Die Dreiecke BCM ,
 CAM bzw. ABM haben folglich die Flä-
cheninhalte

$$\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{MP}, \frac{1}{2}\overline{CA} \cdot \overline{MQ}, \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{MR}.$$

Andererseits ist die Summe dieser
Flächeninhalte gleich F ; daher
gilt

$$F = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \varrho + \frac{1}{2}\overline{CA} \cdot \varrho + \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \varrho = \frac{1}{2}u \cdot \varrho.$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung $\varrho = \frac{2F}{u}$.

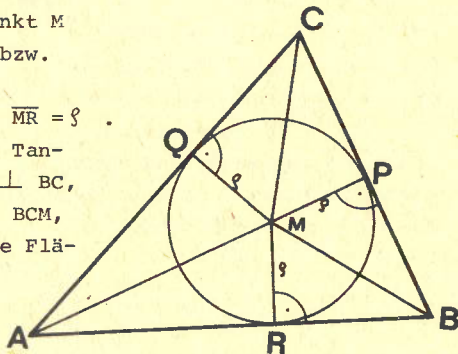


Abb. L 220823

220824) Lösung:

10 Punkte

Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat,
so folgt:

Da AE nach (2) Halbierende des Winkels \sphericalangle BAD ist, gilt

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD. \quad (3)$$

Ferner sind \sphericalangle EAD und \sphericalangle BEA Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle BEA. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA,$$

also ist das Dreieck ABE gleichschenkelig mit $\overline{BE} = \overline{AB} = a$.

Aus (2) folgt somit

$$a = \overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = b + 3 \text{ cm},$$

d. h.

$$a - b = 3 \text{ cm}. \quad (5)$$

Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin

$$a + b = 18 \text{ cm}. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt durch

Addition $2a = 21 \text{ cm}$, also

$$a = 10,5 \text{ cm} \text{ und damit aus (5)}$$

$$b = (10,5 - 3) \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}.$$

Somit ist bewiesen, daß durch (1), (2) die Seitenlängen a, b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen

$$a = 10,5 \text{ cm}, b = 7,5 \text{ cm}.$$

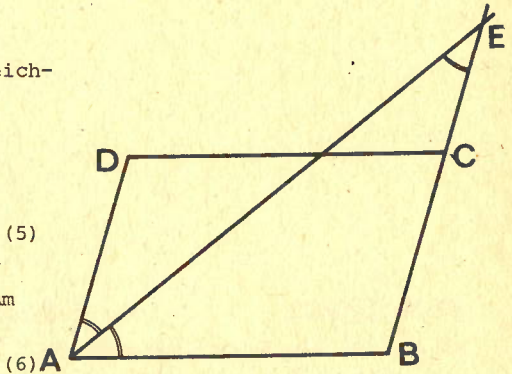


Abb. L 220824

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8

Gesamtpunktzahl: 40

220821

a) Ergebnis mit lückenloser Begründung	4 Punkte
b) Ergebnis mit lückenloser Begründung	<u>6 Punkte</u>
	10 Punkte

220822

Ergebnis und Probe	4 Punkte
Lückenlose Darstellung der Eindeutigkeit	<u>6 Punkte</u>
	10 Punkte

220823

Zerlegung von Dreieck ABC in die Teildreiecke ABM, BCM und CAM	1 Punkt
Benutzung von ξ als Höhe dieser Teildreiecke	2 Punkte
Darstellung des Flächeninhaltes von Dreieck ABC als Summe der Flächeninhalte dieser Teildreiecke	3 Punkte
Ersetzen dieser Summe durch $0,5 u \xi$	3 Punkte
Umstellung nach ξ	<u>1 Punkte</u>
	10 Punkte

220824

Erkenntnis und Nachweis $a - b = 3 \text{ cm}$; $a + b = 18 \text{ cm}$	6 Punkte
Berechnung der Seitenlängen und Schlußfolgerung	<u>4 Punkte</u>
	10 Punkte