XXII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>220731</u>

Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6 % desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A,B,C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;

die vier Familien A,B,C,D erhielten zusammen 336 M zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A,B,C,D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?

b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

<u>220732</u>

Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, daß die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!

b) Beweise, daß bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

A 7;I

220733

Konstruiere ein Trapez ABCD mit AB ‖ DC aus $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm und $h = 3{,}0$ cm! Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez ABCD bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

A 7;II

XXII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

220734

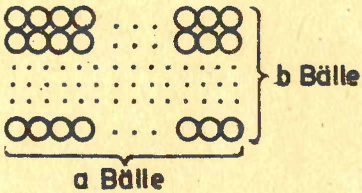

Abb. A 220734

Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie Abb. A 220734 zeigt. Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a,b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a,b.
Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

220735

Beweise folgenden Satz!
Wenn PQRS ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

220736

Von fünf Punkten A,B,C,D,M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Strecke AB; die vier Punkte B,C,D,A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleichgroß.
Zeige, daß durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>220731) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

a) Der Betrag, für den die Familie A,B,C bzw. D Konsummarken abgerechnet hatte, sei a,b,c bzw. d. Dann gilt $b = \frac{1}{2}a$, $c = \frac{1}{3}a$, $d = \frac{1}{4}a$.

Die vier Familien hatten also zusammen für den Betrag $a+ \frac{1}{2}a+ \frac{1}{3}a+ \frac{1}{4}a$ abgerechnet. Da 1,6 % hiervon 336 M sind, gilt

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a = \frac{336 \cdot 100}{1,6} \text{ M},$$

$$\frac{25}{12}a = 21000 \text{ M},$$

$$a = \frac{12 \cdot 21000}{25} \text{ M} = 10080 \text{ M}$$

und damit

$$b = \frac{1}{2} \cdot 10080 \text{ M} = 5040 \text{ M},$$

$$c = \frac{1}{3} \cdot 10080 \text{ M} = 3360 \text{ M},$$

$$d = \frac{1}{4} \cdot 10080 \text{ M} = 2520 \text{ M}.$$

b) Familie A erhielt $\frac{10080 \cdot 1,6}{100}$ M = 161,28 M,

Familie B erhielt $\frac{5040 \cdot 1,6}{100}$ M = 80,64 M,

Familie C erhielt $\frac{3360 \cdot 1,6}{100}$ M = 53,76 M,

Familie D erhielt $\frac{2520 \cdot 1,6}{100}$ M = 40,32 M.

<u>Hinweis:</u> Die acht gesuchten Beträge können auch (auf mehrere Arten) in anderer Reihenfolge ermittelt werden.

<u>220732) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

a) Wählt man als erste Zahl z. B. 0, so ergibt sich

als zweite Zahl $2 \cdot 0 + 7 = 7$,

als dritte Zahl $2 \cdot 7 + 7 = (3 \cdot 7 =)\ 21$,

als vierte Zahl $2 \cdot 21 + 7 = (7 \cdot 7 =)\ 49$,

als fünfte Zahl $2 \cdot 49 + 7 = (15 \cdot 7 =)\ 105$,

als sechste Zahl $2 \cdot 105 + 7 = (31 \cdot 7 =)\ 217$

und damit als Summe $(57 \cdot 7 =)$ 399. Wegen $399:21 = 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

b) Wählt man als erste Zahl n, so ergibt sich

als zweite Zahl $2n + 7$,

als dritte Zahl $2 \cdot (2n + 7) = 4n + 21$,

als vierte Zahl $2 \cdot (4n + 21) = 8n + 49$,

als fünfte Zahl $2 \cdot (8n + 49) = 16n + 105$,

als sechste Zahl $2 \cdot (16n + 105) = 32n + 217$

und damit als Summe $(1+2+4+8+16+32)n + 399 = 63n + 399$.

Wegen $(63n + 399):21 = 3n + 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar, w.z.b.w.

220733) Lösung: 8 Punkte

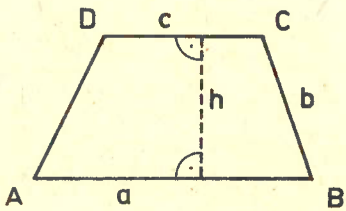

Abb. L 220733a

I. Wenn ABCD ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist (Abb. L 220733a), so folgt:
Es gilt $\overline{AB} = a$. Ferner ist die Gerade durch C,D parallel zur Geraden durch A,B und hat von ihr den Abstand h. Weiterhin gilt $\overline{BC} = b$. Schließlich ist $\overline{CD} = c$, und D liegt auf derselben Seite der Geraden durch B,C wie A.

II. Daher ist ABCD nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn A,B,C und D durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man konstruiert eine Parallele p zu AB im Abstand h.

(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius c und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.

(4) Man konstruiert den Kreis k' um C mit dem Radius c und bezeichnet denjenigen Schnittpunkt von p und k', der auf derselben Seite der Geraden durch B,C wie A liegt, mit D.

III. Beweis, daß für so konstruierte A,B,C,D stets ABCD ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist:
Nach (2),(3),(4) ist ABCD ein Trapez mit $AB \parallel DC$, in dem AB und DC den Abstand h voneinander haben; nach (1) ist $\overline{AB} = a$, nach (3) ist $\overline{BC} = b$, und nach (4) ist $\overline{CD} = c$.

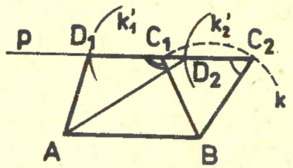

Abb. L 220733b

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b > h$ ist Konstruktionsschritt (3) ausführbar und ergibt zwei verschiedene Schnittpunkte C_1, C_2 von p und k (Abb. L 220733b). Danach ist Konstruktionsschritt (4) jeweils eindeutig ausführbar, ergibt also zu C_1 genau einen Punkt D_1 und zu C_2 genau einen Punkt D_2. Bei (3) entsteht wegen $b > h$ ein gleichschenkliges Dreieck BC_1C_2, dessen Basiswinkel bei C_1 und C_2 folglich spitze Winkel sind. Wählt man die Bezeichnungen wie in Abb. L 220733b (C_1 auf derselben Seite der Geraden durch B,C_2 wie A), so gilt also $\overline{\sphericalangle BC_1D_1} > \overline{\sphericalangle B\,C_1C_2} = \overline{\sphericalangle BC_2C_1} = \overline{\sphericalangle BC_2D_2}$; daher sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 nicht kongruent. Also ist ein Trapez ABCD durch die gegebenen Längen nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

<u>Hinweis:</u> In IV. wurde die Inkongruenz in dem Sinne bewiesen, daß keine Bewegung A,B,C_1,D_1 in d i e s e r Reihenfolge in A,B,C_2,D_2 überführt. Man kann auch beweisen, daß keine Bewegung A,B,C_1,D_1 in i r g e n d e i n e r Reihenfolge in A,B,C_2,D_2 überführt. Diese Feststellungen werden vom Schüler nicht verlangt.

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

220734) Lösung: **7 Punkte**

O.B.d.A. sei in der untersten Schicht b = 10 die kleinere der beiden Anzahlen a,b und a = x die größere. Dann ist in den folgenden Schichten jeweils

$$b = 9,\ 8, \ldots,\ 1$$

die kleinere und

$$a = x-1,\ x-2, \ldots, x-9$$

die größere der beiden Anzahlen a,b. Daraus folgt

$$10x + 9(x-1) + 8(x-2) + 7(x-3) + 6(x-4) + 5(x-5) + 4(x-6) + 3(x-7) + 2(x-8) + (x-9) = 550,$$

$$10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x - 9 - 16 - 21 - 24 - 25 - 24 - 21 - 16 - 9 = 550,$$

$$55x = 550 + 165,$$

$$x = 13.$$

In der untersten Schicht liegen folglich 10·13 Bälle, d. s. 130 Bälle.

Hinweis zur Korrektur: Da die Existenz eines Stapels mit den genannten Eigenschaften der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine Probe nicht für eine vollständige Lösung erforderlich.

220735) Lösung: **6 Punkte**

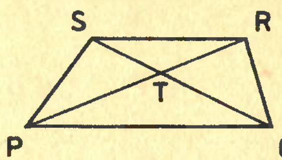

Abb. L 220735

Wegen PQ ∥ SR haben die Dreiecke PQS und PQR zu ihrer gemeinsamen Seite PQ als Grundlinie gleichlange Höhen (Abb. L 220735). Also haben sie einander gleichen Flächeninhalt. Subtrahiert man von ihm den Flächeninhalt des Dreiecks PQT, so ergibt sich, daß die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt haben, w.z.b.w.

220736) Lösung: 7 Punkte

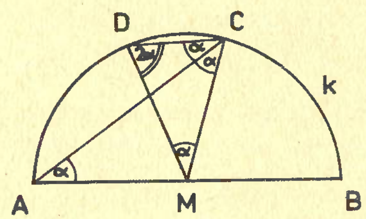

Abb. L 220736

Aus den Voraussetzungen (Abb. L 220736) folgt

$\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BAC} = \alpha$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und

$\overline{\angle ACM} = \overline{\angle BAC} = \alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACM),

also $\overline{\angle DCM} = 2\alpha$

und daher auch $\overline{\angle CDM} = 2\alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CDM).

Hieraus und aus $\overline{\angle CMD} = \alpha$ ergibt sich nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck CDM, $5\alpha = 180^\circ$, also $\alpha = 36^\circ$.