A 11/12;I

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>211241</u>

Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, 1982)$ genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

<u>211242</u>

Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 1, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 1 \end{array}\right) \qquad (1)$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.
Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen besitzt.

A 11/12;I

Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

211243

Man beweise, daß sichaus fünf geraden "Stäben" kein räumlicher Streckenzug ABCDEA bilden läßt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:

(1) Keine vier der fünf Punkte A,B,C,D,E liegen in einer gemeinsamen Ebene.

(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt (s. Abb. A211243): Keine zwei der fünf Punkte A,B,C,D,E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen; ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.

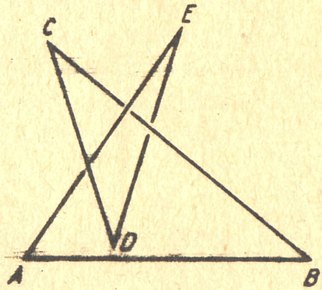

Abb. A 211243

Hinweis: Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

A 11/12;II XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

211244

Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, wobei $n \geqq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte. Man setze

$$r = \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:

(a) Ist $r \geqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leqq x \leqq r$.

(b) Ist $r \leqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$.

211245

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA = 90^\circ$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2 \text{ gilt.}$$

Von den nachstehenden Aufgaben 211246A und 211246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

211246A

a) Man beweise: Wenn

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB},\ d = \overline{AD},\ e = \overline{BD},\ f = \overline{CD} \qquad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders ABCD sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_0 dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_0 < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen läßt: Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so daß für den Oberflächeninhalt A_0 jedes Tetraeders ABCD, wenn man dessen Kantenlänger wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_0 \leqq \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (3)$$

gilt.

Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

211246B

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nicht negativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle $x \geqq 0$ gilt $f(x) \geqq 1$ und $g(x) \geqq 0$.

(2) Für alle $x \geqq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.

(3) Für alle $x \geqq 0$ und alle $y \geqq 0$ gilt $f(\sqrt{x^2+y^2}) =$
$= f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

(4) Für alle $x \geqq 0$ und alle $y \geqq 0$ gilt $g(\sqrt{x^2+y^2}) =$
$= f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$.

L 11/12;I

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

211241) Lösung: 6 Punkte

Eine Auswahl, die (1),(2),(3) erfüllt, ist stets möglich. Sie läßt sich z. B. folgendermaßen erhalten: Man betrachte für jedes $i = 1,\dots,991$ die beiden Zahlen a_{2i-1} und a_{2i}. Sind sie einander gleich, so wähle man genau eine von ihnen aus. Sind sie voneinander verschieden (d. h. eine gleich 1 und die andere gleich -1), so wähle man entweder beide aus oder beide nicht; und zwar kann man zwischen diesen Möglichkeiten so entscheiden, daß (1) und (2) erfüllt werden. Denn wenn der Fall $a_{2i-1} \neq a_{2i}$ höchstens einmal vorkommt, so werden (1) und (2) bereits wegen der Auswahlvorschrift in den übrigen Fällen mit $a_{2i-1} = a_{2i}$ erfüllt. Wenn aber der Fall $a_{2i-1} \neq a_{2i}$ mehr als einmal vorkommt, dann kann man mindestens einmal die beiden betreffenden Zahlen auswählen und mindestens einmal nicht.

Aus den Auswahlvorschriften folgt ferner unmittelbar, daß auch (3) erfüllt wird.

211242) Lösung: 7 Punkte

Man beweist zunächst folgende Hilfsaussage[1]:

Wenn die Zahl

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_sc_1$$

gleich 0 ist, so hat das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele Lösungen.

---

1 Hinweise zur Korrektur: Die Hilfsaussage kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden. An der Art des Zitierens und der Verwendung sollte aber erkennbar sein, daß mit dem Zitat wirklich der genaue Sachverhalt (Unterscheidung der verschiedenen Fälle) erfaßt wurde. Eine Untersuchung des Falles $D \neq 0$ (bzw. ein Nachweis, daß nur für $D = 0$ keine oder unendlich viele Lösungen auftreten) ist für die vorliegende Aufgabe nicht erforderlich. Ferner ist in den Fällen mit (unendlich vielen) existierenden Lösungen nur deren Existenznachweis (die "Probe") erforderlich, ein Einzigkeitsnachweis (die "Lösungsfindung") nicht. Also wird ein Schluß aus der Annahme, (x,y,z) sei Lösung von (1), nur in den Fällen benötigt, in denen die Unlösbarkeit von (1) bewiesen werden soll. Eine Möglichkeit, selbst die somit noch im Beweis der Hilfsaussage verbleibenden allgemein-theoretischen Aussagen weiter zu reduzieren, zeigt der 2. Lösungsweg.

Beweis der Hilfsaussage: Aus $D = 0$ folgt: Es liegt genau einer der folgenden Fälle I bis V vor:

I. Es ist $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = a_3 = b_3 = c_3 = 0$.
In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) keine Lösung.

II. Nicht alle Zahlen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ sind gleich 0, aber es gilt $a_1 = a_2 = a_3,\ b_1 = b_2 = b_3,\ c_1 = c_2 = c_3$. (2)
In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) unendlich viele Lösungen. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1 \neq 0$, so ist jedes Tripel (x,y,z) mit beliebigen reellen y,z und jeweils zugehörigem $x = \frac{1}{a_1}(1-b_1y-c_1z)$ eine Lösung von (1).

III. Nicht alle Gleichungen (2) gelten, aber es ist

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = a_3b_1 - a_1b_3 =$$
$$= b_1c_2 - b_2c_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = b_3c_1 - b_1c_3 =$$
$$= c_1a_2 - c_2a_1 = c_2a_3 - c_3a_2 = c_3a_1 - c_1a_3 = 0. \qquad (3)$$

In diesem Fall hat (1) keine Lösung. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1 \neq a_2$, so folgt aus der Annahme, es gäbe eine Lösung (x,y,z) von (1): Multipliziert man in (1) die erste Gleichung mit $(-a_2)$, die zweite mit a_1 und addiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich der Widerspruch $(a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1 - a_2$.

IV. Nicht alle Gleichungen (3) gelten, aber es sind (außer D) auch die drei Zahlen

$$D_1 = b_1c_2 - b_2c_1 + b_2c_3 - b_3c_2 + b_3c_1 - b_1c_3,$$
$$D_2 = c_1a_2 - c_2a_1 + c_2a_3 - c_3a_2 + c_3a_1 - c_1a_3,$$
$$D_3 = a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3$$

gleich 0.
In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) unendlich viele Lösungen. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, so ist jedes Tripel (x,y,z) mit beliebigem reellem z und jeweils zugehörigen

$$x = \frac{b_2 - b_1 + (b_1c_2 - b_2c_1)z}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1 - a_2 + (a_2c_1 - a_1c_2)z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

eine Lösung von (1); denn durch Einsetzen dieser Werte in die erste und zweite Gleichung von (1) bestätigt man unmittelbar, daß diese Gleichungen erfüllt sind; für die dritte Gleichung erhält man

$$a_3x + b_3y + c_3z = \frac{a_1b_2 - a_2b_1 - D_3 + D.z}{a_1b_2 - a_2b_1} = 1.$$

V. Nicht alle drei Zahlen D_1, D_2, D_3 sind gleich 0 (aber es gilt $D = 0$). In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) keine Lösung. Ist nämlich o.B.d.A. $D_1 \neq 0$, so folgt aus der Annahme, es gäbe eine Lösung (x,y,z) von (1): Multipliziert man in (1) die erste Gleichung mit $b_2c_3 - b_3c_2$, die zweite mit $b_3c_1 - b_1c_3$ und die dritte mit $b_1c_2 - b_2c_1$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich der Widerspruch $D.x = D_1$. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Nun kann B die folgende Strategie einhalten:

1. O.B.d.A. sei angenommen, daß A zuerst den Koeffizienten a_1 belegt hat (auf diese Möglichkeit lassen sich alle anderen durch Vertauschen von Gleichungen oder Vertauschen von Unbekannten zurückführen). Dann belegt B den Koeffizienten c_2 mit 0 und erreicht damit

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,$$

worin nur der Koeffizient a_1 bereits festgelegt ist.

2. Belegt nun A den Koeffizienten c_3, so belegt B den Koeffizienten b_2 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3.$$

Belegt dagegen A einen anderen Koeffizienten, so belegt B den Koeffizienten c_3 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

In beiden Fällen ist in der erhaltenen Darstellung von D höchstens ein Koeffizient festgelegt (im ersten Fall ist dies genau der Koeffizient c_3).

3. Belegt jetzt A einen weiteren Koeffizienten, so kommen höchstens in einem der beiden Produkte (aus der erreichten Darstellung von D) zwei bereits festgelegte Koeffizienten vor. B kann dann in einem Produkt mit maximaler Anzahl bereits festgelegter Koeffizienten einen weiteren Koeffizienten mit 0 belegen und damit

$$D = a_2b_3c_1 \quad \text{oder} \quad D = -a_3b_2c_1$$

erreichen, worin jeweils höchstens ein Koeffizient festgelegt ist.

4. Nach der nächsten Belegung eines Koeffizienten durch A kann B folglich in der zuletzt erhaltenen Darstellung von D noch einen freien Koeffizienten mit 0 belegen und damit $D = 0$ erreichen.

Wegen der Hilfsaussage folgt dann, daß B gewinnen wird, unabhängig davon, welche weiteren Belegungen bis zum Ende des Spieles noch vorgenommen werden. Damit ist bewiesen: B kann in jedem Falle den Gewinn erzwingen.

211243) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, es gäbe einen Streckenzug ABCDEA mit den Eigenschaften (1) und (2).
Aus der genannten Blickrichtung betrachtet, würde dann D mit einem Punkt D' der Ebene e durch A,C,E zusammenfallend erscheinen, also CD mit der Strecke CD'. Dabei würde CD die Strecke CD' verdecken, da ein innerer Punkt von CD einen Punkt der Ebene e verdecken würde (nämlich einen inneren Punkt der Strecke AE). Folglich würde DE die Strecke D'E verdecken. Da nun aber die Strecke BC ihrerseits einen inneren Punkt von DE verdecken würde, so ergäbe sich:
(3) BC verdeckt eine Strecke in der Ebene e.
Andererseits wäre nach Annahme ein innerer Punkt von BC durch die Strecke AE verdeckt, also folgte erst recht:
(4) BC wird von der Ebene e verdeckt.

Da (3) und (4) einander widersprechen, war die Annahme, es gäbe einen Streckenzug ABCDEA mit den Eigenschaften (1) und (2), falsch, w.z.b.w.

L 11/12;II XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

211244) Lösung: 6 Punkte

Zum Beweis von (a) und (b) genügt es, die folgende Aussage (c) zu beweisen:

(c) Wenn f(x) eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt $|x_0| \leqq r$. Aus (c) ergibt sich nämlich (a) folgendermaßen: Jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| \leqq 1$ liegt wegen der Voraussetzung $r \geqq 1$ im Intervall $-r \leqq x \leqq r$; jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ aber wegen (c).

Ferner ergibt sich (b) folgendermaßen: Gäbe es eine Nullstelle x_0, die nicht im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ läge, so führte (c) auf $r \geqq |x_0| > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r \leqq 1$.

Beweis zu (c):

Wenn f(x) eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt nach der Dreiecksungleichung ($|s+t| \leqq |s| + |t|$ für beliebige reelle s und t)

$$\begin{aligned}|a_n| \cdot |x_0|^n &= |-a_0 - a_1x_0 - \ldots - a_{n-1}x_0^{n-1}| \leqq \\ &\leqq |a_0| + |a_1| \cdot |x_0| + \ldots + |a_{n-1}| \cdot |x_0|^{n-1} \\ &\leqq (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)|x_0|^{n-1},\end{aligned}$$

wegen $|a_n| \neq 0$, $|x_0| \neq 0$ also

$$|x_0| \leqq \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|},$$

w.z.b.w.

211245) Lösung: 6 Punkte

Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, sei e. Es sei P ein beliebiger Punkt des Raumes. Das Lot von P auf e sei PQ, das Lot von Q auf die Gerade durch C,A sei QR, das Lot von Q auf die Gerade durch C,B sei QS. Dann ist CRQS ein (möglicherweise zur Strecke oder zum Punkt entartetes) Rechteck. Ferner sei $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$, $\overline{CR} = \overline{SQ} = x$, $\overline{CS} = \overline{RQ} = y$, $\overline{QP} = z$. Nach dem Satz von Pythagoras ist $\overline{AQ}^2 = (b \pm x)^2 + y^2$ und, da wegen $PQ \perp e$ auch $PQ \perp AQ$

gilt, $\overline{PA}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QP}^2 = (b \pm x)^2 + y^2 + z^2$. Entsprechend folgt $\overline{PB}^2 = x^2 + (a \pm y)^2 + z^2$, $\overline{PC}^2 = x^2 + y^2 + z^2$; jeweils mit einem der beiden Vorzeichen[1].

Daher hat ein Punkt P genau dann die Eigenschaft $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2$, wenn für ihn $(b \pm x)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (a \pm y)^2 + z^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2$ gilt. Dies ist äquivalent mit

$$(b \pm x)^2 + (a \pm y)^2 + z^2 \leqq 0. \qquad (1)$$

Wegen $(b + x)^2 > 0$, $(a + y)^2 > 0$, $(b - x)^2 \geqq 0$, $(a - y)^2 \geqq 0$, $z^2 \geqq 0$ trifft (1) genau dann zu, wenn bei den Doppelvorzeichen überall das Minuszeichen gilt und $b-x = a-y = z = 0$ ist. Dies gilt genau für denjenigen Punkt P, für den ACBP ein Rechteck ist. Somit ist die gesuchte Menge diejenige, die genau diesen Punkt enthält.

<ins>Andere Lösungsdarstellungen</ins> sind z. B. mit Hilfe der Vektorrechnung möglich. Wählt man etwa M als Mittelpunkt der Strecke AB und setzt $\overrightarrow{MA} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{MB} = \mathfrak{b}$, $\overrightarrow{MC} = \mathfrak{c}$, $\overrightarrow{MP} = \mathfrak{x}$, so wird $\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$, sowie nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}|$, und die Bedingung $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2$ ist der Reihe nach äquivalent mit $(\mathfrak{a} - \mathfrak{x})^2 + (\mathfrak{b} - \mathfrak{x})^2 \leqq (\mathfrak{c} - \mathfrak{x})^2$, $\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{x}^2 \leqq -2\mathfrak{c}\mathfrak{x}$, $(\mathfrak{c} + \mathfrak{x})^2 \leqq 0$, $\mathfrak{x} = -\mathfrak{c}$.

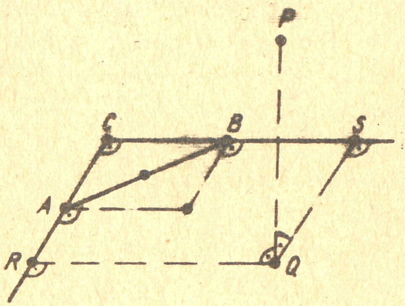

Abb. L 211245

<ins>211246A) Lösung:</ins> <ins>8 Punkte</ins>

a) Für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABC gilt

$$2F_1 = ab \sin\gamma = bc \sin\alpha = ac \sin\beta,$$

wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC sind und daher mindestens zwei der Werte $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ kleiner als 1 sind. Hiernach und wegen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqq 0$, $b^2 - 2bc + c^2 \geqq 0$, $c^2 - 2ac + a^2 \geqq 0$ gilt

---

1 Bis hierher kann der Lösungsverlauf auch einfach als aus der räumlichen analytischen Geometrie bekannt zitiert werden, mit vorzeichenfähigen x,y,z und dem Minuszeichen statt des Doppelvorzeichens.

$$2(a^2+b^2+c^2) = (a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2) \geqq 2ab + 2bc + 2ac$$
$$> 2ab \sin\gamma + 2bc \sin\alpha + 2ac \sin\beta = 12F_1, \text{ also}$$
$F_1 < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$.

Entsprechend gilt für die Flächeninhalte F_2, F_3, F_4 der Dreiecke BCD, CAD, ABD:

$F_2 < \frac{1}{6}(a^2+e^2+f^2)$, $F_3 < \frac{1}{6}(b^2+d^2+f^2)$, $F_4 < \frac{1}{6}(c^2+d^2+e^2)$.

Daraus folgt

$A_O = F_1+F_2+F_3+F_4 < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2 + a^2+e^2+f^2 + b^2+d^2+f^2 + c^2+d^2+e^2)$,

womit die Ungleichung (2) bewiesen ist.

b) Nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ gilt

$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2) - 2ab \cos\gamma \geqq 4ab - 2ab \cos\gamma$, also wegen

$\sin\gamma > 0$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2ab \sin\gamma \cdot \frac{2 - \cos\gamma}{\sin\gamma} = 4F_1 \frac{2 - \cos\gamma}{\sin\gamma}. \qquad (4)$$

Ferner gilt

$$\frac{2 - \cos\gamma}{\sin\gamma} \geqq \sqrt{3}. \qquad (5)$$

Beweismöglichkeiten für (5):

1. Es gilt $\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\gamma = \cos 60^\circ \cdot \cos\gamma + \sin 60^\circ \cdot \sin\gamma =$ $= \cos(60^\circ - \gamma) \leqq 1$, also $\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\gamma \leqq 2$, $2-\cos\gamma \geqq \sqrt{3}\sin\gamma$, woraus (5) wegen $\sin\gamma > 0$ folgt.
2. Für die im Intervall $0 < \gamma < \pi$ durch $f(\gamma) = \frac{2 - \cos\gamma}{\sin\gamma}$ definierte Funktion f gilt:

$$f'(\gamma) = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\gamma - (2 - \cos\gamma)\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{1 - 2\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

und daher $f'(\gamma) \leqq 0$ für $0 < \gamma \leqq \frac{\pi}{3}$, $f'(\gamma) \geqq 0$ für $\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \pi$.
Somit ist f im Intervall $0 < \gamma \leqq \frac{\pi}{3}$ fallend, im Intervall $\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \pi$ steigend. Für alle γ im Intervall $0 < \gamma < \pi$ gilt daher $f(\gamma) \geqq f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Aus (4) und (5) folgt

$a^2+b^2+c^2 \geqq 4F_1\sqrt{3}$, also $F_1 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$.

Analog erhält man

$F_2 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+e^2+f^2)$, $F_3 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b^2+d^2+f^2)$, $F_4 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(c^2+d^2+e^2)$.

Daher gilt für jedes Tetraeder $A_O \leqq \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$.

Insbesondere gilt für ein reguläres Tetraeder, also eines mit $a=b=c=d=e=f$,

$$A_0 = 4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

Also gibt es eine kleinste reelle Zahl λ so, daß für jedes Tetraeder die Ungleichung (3) gilt, nämlich $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Wegen $4\cdot 3 > 9$, also $2\sqrt{3} > 3$ gilt für diese Zahl auch $\lambda < \frac{1}{3}$.

Hinweise:

1. Man kann auch erst Aufgabe b) lösen und dann darauf verweisen, daß damit erst recht bereits Aufgabe a) gelöst ist.
2. Der Nachweis von $F_1 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$ kann auch mit der Heronischen Formel geführt werden:
   Nach der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischem Mittel gilt (mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$):

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq \sqrt{s\cdot\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{12\sqrt{3}}.$$

211246B) Lösung: 8 Punkte

I. Angenommen, f und g seien Funktionen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Dann werden durch

$u(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x) - g(x)$ für alle $x \geqq 0$ (5)

Funktionen u und v definiert, die nach (1),(2)

$u(x) \geqq 1$, $u(x)\cdot v(x) = 1$ für alle $x \geqq 0$ (6)

und nach (3),(4)

$u(\sqrt{s^2+t^2}) = (f(s)+g(s))\cdot(f(t)+g(t)) = u(s)\cdot u(t)$ für alle $s,t \geqq 0$,

also $u(\sqrt{x+y}) = u(\sqrt{x})\cdot u(\sqrt{y})$ für alle $x,y \geqq 0$ erfüllen. Somit wird durch

$F(x) = \ln(u(\sqrt{x}))$ für alle $x \geqq 0$ (7)

eine Funktion F definiert, die

$F(x) \geqq 0$ für alle $x \geqq 0$ (8)

und

$F(x+y) = F(x) + F(y)$ für alle $x,y \geqq 0$ (9)

erfüllt.

Daraus folgt[1]: Es gibt eine reelle Zahl k mit $k \geqq 0$ so, daß

$$F(x) = kx \quad \text{für alle } x \geqq 0 \tag{10}$$

gilt. Nach (7),(6),(5) ist folglich für alle $x \geqq 0$

$$u(x) = e^{kx^2}, \; v(x) = e^{-kx^2},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} + e^{-kx^2}), \; g(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2}). \tag{11}$$

Daher können nur diejenigen Funktionen f und g, die jeweils mit einem reellen $k \geqq 0$ durch (11) für alle $x \geqq 0$ definiert sind, die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften.

Beweis zu (1): Für alle $x \geqq 0$ gilt: Wegen $kx^2 \geqq 0$ ist $e^{kx^2} \geqq 1 \geqq$ $\geqq e^{-kx^2} > 0$. Daraus folgt einerseits $g(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2}) \geqq 0$; andererseits folgt, daß man aus $(e^{kx^2} - 1)^2 \geqq 0$, also $e^{2kx^2} + 1 \geqq 2e^{kx^2}$, auf $f(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2}) \geqq 1$ schließen kann.

---

1 Dies kann als bekannter Sachverhalt (Lösung der Funktionalgleichung (9) für nach unten beschränkte Funktionen) zitiert oder folgendermaßen bewiesen werden:
Aus (9) folgt $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$, also $F(0) = 0$. Ferner folgt durch vollständige Induktion $F(mx) = mF(x)$ für alle $x \geqq 0$ und alle natürlichen Zahlen m. Für jede rationale Zahl $r = \frac{m}{m} \geqq 0$ ($n > 0$, m natürliche Zahlen) ist daher $F(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} \cdot nF(\frac{m}{n}) = $ $= \frac{1}{n} \cdot F(m) = \frac{m}{n} \cdot F(1)$, mit $k = F(1)$ (und wegen (8) daher $k \geqq 0$) also $F(r) = kr$. Daraus ergibt sich (10) folgendermaßen auch für beliebiges reelles $x \geqq 0$:
Wäre $F(x) > kx$, so gäbe es ein rationales $r > x$ mit $F(x) > kr$ (nämlich im Fall $k = 0$ ein beliebiges rationales $r > x$, im Fall $k > 0$ ein rationales r mit $\frac{F(x)}{k} > r > x$). Daraus folgte wegen (8), also $F(r-x) \geqq 0$, der Widerspruch $F(r) = F(x+r-x) =$ $= F(x) + F(r-x) \geqq F(x) > kr$.
Wäre $F(x) < kx$, so wäre $k > 0$, und es gäbe ein rationales r mit $\frac{F(x)}{k} < r < x$, also folgte wegen $F(x-r) \geqq 0$ der Widerspruch $F(r) \leqq F(r) + F(x-r) = F(r+x-r) = F(x) < kr$.

Beweis zu (2):

Für alle $x \geq 0$ ist $(f(x))^2-(g(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{2kx^2} + 2+e^{-2kx^2} - e^{2kx^2} +$

$+ 2-e^{-2kx^2}) = 1.$

Beweis zu (3): Für alle $x,y \geq 0$ ist $f(x)f(y) + g(x)g(y) =$

$= \frac{1}{4}(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)} + e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} -$

$- e^{k(x^2-y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)})$

$= \frac{1}{2}(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)}) = f(\sqrt{x^2+y^2}).$

Beweis zu (4): Für alle $x,y \geq 0$ ist $f(x)g(y) + g(x)f(y) =$

$= \frac{1}{4}(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} - e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)} +$

$+ e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)})$

$= \frac{1}{2}(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}) = g(\sqrt{x^2+y^2}).$

Somit entsprechen genau die bei (11) genannten Funktionen f und g den Bedingungen der Aufgabe.