XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

211231

Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x+a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise: Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b,c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b- \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

211232

a) Beweisen Sie, daß kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!
b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!

Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

211233

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen $x \neq -c$
durch $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ definierte Funktion f
genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt

$$f(f(f(x))) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

211234

Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geqq 3$ so, daß in der durch

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n = 1,2,3,...)$$

definierten Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

211235

37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, daß genau 9 von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen. Es sollen nun in "Arbeitsgängen" Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen "Arbeitsgang" genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen "Arbeitsgängen" erreichen kann, daß alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen! Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden "Arbeitsgänge"!

Von den folgenden Aufgaben 211236 A und 211236 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

211236A

Unter einem "Stapel" von Gegenständen (wie z. B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in Abbildung A 211236A verstanden, bei der jeweils für $k = 1, \ldots, m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen. Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als "Höhe" des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)

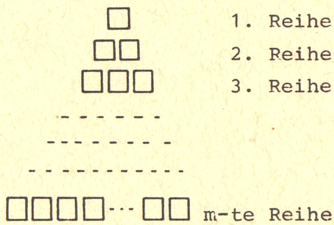

Abb. A 211236A

Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leqq z \leqq 10000$ so existiert, daß es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen läßt!

211236B

Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geqq 3$: Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}.$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten läßt.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

211231) Lösung: 6 Punkte

Nach Voraussetzung gilt: $P(x_0)=0$, d. h.

$a_3\ (b+\sqrt{c})^3 + a_2\ (b+\sqrt{c})^2 + a_1\ (b+\sqrt{c}) + a_0 = 0$, also

$a_3b^3+3a_3bc+a_2b^2+a_2c+a_1b+a_0+\sqrt{c}\cdot(3a_3b^2+a_3c+2a_2b+a_1) = 0.$

Für die Zahlen

$$A_1 = a_3b^3 + 3a_3bc + a_2b^2 + a_2c + a_1b + a_0, \qquad (1)$$

$$A_2 = 3a_3b^2 + a_3c + 2a_2b + a_1 \qquad (2)$$

gilt also

$$A_1 + A_2\sqrt{c} = 0. \qquad (3)$$

Wäre nun $A_2 \neq 0$, so folgte $\sqrt{c} = -\frac{A_1}{A_2}$ und daraus der Widerspruch,

daß $\sqrt{c}$ rational wäre; denn nach Voraussetzung und (1), (2) sind A_1 und A_2 rational. Also ist[1]

$$A_2 = 0. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt[1]

$$A_1 = 0. \qquad (5)$$

Weiterhin errechnet man (unter Verwendung von (1) und (2)), daß

$$P(x_1) = P(b-\sqrt{c}) = a_3(b-\sqrt{c})^3 + a_2(b-\sqrt{c})^2 + a_1(b-\sqrt{c}) + a_0 = A_1 - A_2\sqrt{c} \qquad (6)$$

gilt. Aus (4), (5), (6) folgt $P(x_1) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

211232) Lösung: 7 Punkte

a) Angenommen, es gäbe ein Polyeder P mit genau sieben Kanten.
Aus dieser Annahme folgt,

(1) falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 hat: Zu F gehören mindestens vier Kanten, da jedes n-Eck auch n Kanten besitzt. Von jeder der Ecken A_i geht noch

---

1 Der Schluß von (3) mit irrationalem $\sqrt{c}$ und rationalen A_1, A_2 auf $A_1=A_2=0$ kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

mindestens eine Kante k_i aus, die nicht in der Ebene durch F verläuft. Je zwei dieser Kanten k_i, k_j $(i \neq j)$ sind voneinander verschieden (denn da k_i jeweils A_i enthält, würde eine Kante, die $k_i = k_j$ wäre, A_i und A_j enthalten, also in der Ebene durch F verlaufen). Damit ergibt sich der Widerspruch, daß P mindestens acht Kanten besitzen müßte.

(2) falls P nur Dreiecke als Seitenflächen besitzt: Die Anzahl dieser Dreiecke sei m. Zählt man für jedes dieser m Dreiecke seine drei Kanten auf, so hat man mit dieser Aufzählung von 3m Kanten jede Kante des Polyeders genau zweimal erfaßt; denn an jede Kante des Polyeders grenzen genau zwei Seitenflächen an. Also besitzt P genau $\frac{3m}{2}$ Kanten. Damit ergibt sich der Widerspruch, daß die Anzahl m die Gleichung $\frac{3m}{2} = 7$, d. h. $3m = 14$ erfüllen müßte.

b) Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 7$.

(1) Ist n gerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geqq 4$ mit $n = 2m$. Dann hat z. B. jede m-seitige Pyramide genau n Kanten, nämlich, wenn $G = A_1A_2 \ldots A_m$ ihre Grundfläche und S ihre Spitze ist, die m Seitenkanten von G und die m hiervon und untereinander verschiedenen Kanten $A_1S, \ldots, A_mS$.

(Abb. L 211232a für $m = 4$)

(2) Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geqq 3$ mit $n = 2m+3$. Dann hat z. B. jedes folgendermaßen zu erhaltende Polyeder P genau n Kanten: Man wähle eine m-seitige Pyramide Q mit der Grundfläche $A_1A_2 \ldots A_m$ und der Spitze S. Außerhalb Q wähle man einen Punkt R, der auf keiner Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte von Q liegt und so nahe an der Seitenfläche $F = A_1A_2S$ gelegen ist, daß das Tetraeder $T = A_1A_2SR$ mit Q nur F gemeinsam hat. Dann wird aus Q und T ein Polyeder zusammengesetzt, das genau die 2m Kanten von Q sowie die hiervon und untereinander verschiedenen Strecken A_1R, A_2R, SR als Seitenkanten besitzt. (Abb. L 211232b für $m = 3$)

<u>Hinweis:</u> Zu a) kann man den Eulerschen Polyedersatz heranziehen. Er wird den Schülern zumeist nur in der Gestalt bekannt sein, daß $E+F = K+2$ für die Ecken-, Flächen- und Kantenzahl eines Polyeders gilt, von dem vorausgesetzt wird, daß es topologisch zur Kugelfläche äquivalent ist (d. h. ein Polyeder vom

Geschlecht 0) ist. Für diese Polyeder erhält man in der Tat aus der Annahme $K = 7$ die Gleichung $E+F = 9$, die wegen $E \geqq 4$, $F \geqq 4$ nur durch $E=4$, $F=5$ oder $E=5$, $F=4$ erfüllbar wäre, was beides nicht möglich ist, da sowohl $E=4$ als auch $F=4$ nur für Tetraeder gelten können.

Werden zu a) keine weiteren Ausführungen gemacht[1], so ist ein solcher Gedankengang als eine zwar wesentliche, aber nicht vollständige Teillösung von a) zu werten.

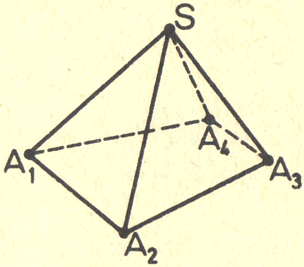

Abb. L 211232a

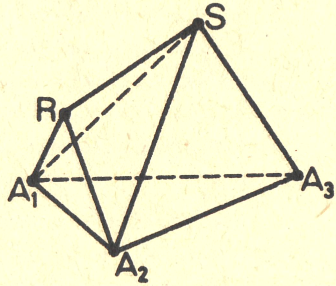

Abb. L 211232b

<u>211233) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Angenommen, ein Tripel (a,b,c) besitzt die verlangten Eigenschaften. Dann folgt: Die durch $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f ist nicht konstant; denn im Falle $f(x)=d \neq -c$ für alle $x \neq -c$ wäre auch $f(f(f(x)))=d$ für alle $x \neq -c$, also (2) nicht erfüllt, da $\frac{x-1}{x+1} = d$ für höchstens ein x gelten kann; im Falle $f(x) = -c$ für alle $x \neq -c$ aber gäbe es kein x, für das $f(x)$ und $f(f(x))$ definiert sind, im Widerspruch zu (1).

Für jedes d hat folglich die Gleichung $ax + b = xd + cd$ nicht alle $x \neq -c$ als Lösung. Somit hat sie als lineare Gleichung höchstens eine Lösung. Daher gibt es höchstens jeweils ein x mit $f(x) = -c$ bzw. mit $f(f(x)) = -c$. Hiernach und wegen (2) gibt es unendlich viele Zahlen $x \neq -1$, für die $f(x)$ sowie

---

1 Zum Beispiel läßt sich $K=7$ folgendermaßen als unvereinbar mit einem Geschlecht >0, d. h. mit positiver Anzahl von "Henkeln", nachweisen: Jeder "Henkel" müßte ein Vieleck $A_1A_2...A_m$ mit $m \geqq 3$ Ecken, also $m \geqq 3$ Kanten, als "Innenring" besitzen, und zur Bildung der Fläche des "Henkels" müßten von jedem A_i mindestens zwei Kanten h_i und k_i ausgehen; alle genannten $3m \geqq 9$ Kanten wären untereinander verschieden.

$$f(f(x)) = \frac{(a^2+b)x+(a+c)b}{(a+c)x+(b+c^2)}$$

und
$$f(f(f(x))) = \frac{(a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b}{(a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3)} \qquad (3)$$

existieren und für die
$((a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b)(x+1)=((a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3))(x-1)$
gilt. Aus dieser Gleichheit zweier Polynome für unendlich viele x folgen die Koeffizientengleichheiten

$$a^3+2ab+bc = a^2+ac+b+c^2, \qquad (4)$$
$$a^3+2ab+bc + (a^2+ac+b+c^2)b= -(a^2+ac+b+c^2)+ab+2bc+c^3, \qquad (5)$$
$$(a^2+ac+b+c^2)b = -(ab+2bc+c^3). \qquad (6)$$

Aus (4),(5),(6) folgt durch Addition, daß beide Seiten von (5) gleich 0 sind; hieraus und aus (4) erhält man $a^3+2ab+bc=ab+2bc+c^3$, also $a(a^2+b) = c(b+c^2)$ und durch Addition von $ac(a+c)$

$$a(a^2+ac+b+c^2) = c(a^2+ac+b+c^2). \qquad (7)$$

Wäre $a^2+ac+b+c^2 = 0$, so folgte aus (6), daß (3) für kein x definiert wäre. Also ist

$$a^2+ac+b+c^2 \neq 0, \qquad (8)$$

und aus (7) ergibt sich

$$a = c.$$

Hiernach und nach (4),(2) ist $(a^2+ac+b+c^2)b = -(a^2+ac+b+c^2)$, wegen (8) also $b = -1$.
Damit geht (4) über in

$$a^3 - 3a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Da eine Lösung hiervon $a = -1$ lautet (bzw. nach der bekannten Abspaltung des Faktors $a+1$ von $a^3 + 1$ und von $3a^2 + 3a$) folgt $(a+1)(a^2 - 4a + 1) = 0$ und daraus

$$a = -1 \text{ oder } a = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Also können nur die Funktionen f mit

$$f(x) = \frac{-x-1}{x-1} \text{ für alle } x \neq 1$$

bzw. mit $f(x) = \dfrac{(2\pm\sqrt{3})x - 1}{x + (2\pm\sqrt{3})}$ für alle $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$

(jeweils stets mit dem oberen oder stets mit dem unteren Vorzeichen) die die Bedingungen (1), (2) erfüllen, d. h. es können nur die Tripel $(-1,-1,-1)$; $(2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3})$; $(2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$ die verlangten Eigenschaften haben.

1. Für das Tripel (-1,-1,-1) existieren

$f(f(x)) = f(\frac{-x-1}{x-1}) = -\frac{1}{x}$ für alle x mit $x \neq 1$, $x \neq 0$ und

$f(f(f(x))) = f(-\frac{1}{x}) = \frac{x-1}{x+1}$ für alle x mit $x \neq 1$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Für die beiden anderen Tripel existieren

$$f(f(x)) = f(\frac{(2\pm\sqrt{3})x - 1}{x + (2\pm\sqrt{3})} = \frac{(3\pm 2\sqrt{3})x - (2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x + (3\pm 2\sqrt{3})}$$

für alle x mit $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$ und

$$f(f(f(x))) = f(\frac{(3\pm 2\sqrt{3})x - (2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x + (3\pm 2\sqrt{3})} = \frac{(5\pm 3\sqrt{3})(x-1)}{(5\pm 3\sqrt{3})(x+1)}$$

für alle x mit $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$, $x \neq -1$.

Daher und wegen $5\pm 3\sqrt{3} \neq 0$ erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (1), (2).

Folglich haben genau die Tripel (-1,-1,-1); $(2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3})$ und $(2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$ die verlangten Eigenschaften.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

211234) Lösung: **6 Punkte**

I. Wenn eine Zahl q die geforderte Eigenschaft hat, so folgt:
Es gibt eine Zahl $a_1 \neq 0$ und eine natürliche Zahl $k \geqq 3$ mit

$$a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{1}{2}(a_1 \cdot q^{k-2} + a_1 \cdot q^{k-3}).$$

Wegen $a_1 \neq 0$ und $q \neq 0$ folgt hieraus

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0,$$

also $q = 1$ oder $q = -\frac{1}{2}$.

II. Die Zahlen $q = 1$ und $q = -\frac{1}{2}$ haben die geforderte Eigenschaft.
Es gilt sogar[1]: Für jedes a_1 und für jede natürliche Zahl $k \geqq 3$ ist in der Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ das arithmetische Mittel von a_{k-1} und a_{k-2} gleich der Zahl

$$\frac{1}{2}(a_1 \cdot q^{k-2} + a_1 \cdot q^{k-3}) = \frac{1}{2}a_1 \cdot q^{k-3} \cdot (q+1) = \begin{cases} a_1 & \text{für } q = 1 \\ \frac{1}{4}\, a_1 \cdot q^{k-3} & \text{für } q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= a_1 \cdot q^{k-1} = a_k.$$

211235) Lösung: **7 Punkte**

a) Werden bei einem Arbeitsgang genau x oben blaue Karten umgedreht und damit zu oben roten Karten, so werden bei demselben Arbeitsgang genau (20-x) oben rote Karten umgedreht und damit zu oben blauen Karten. Die Anzahl b der oben blauen Karten geht somit in $b - x + (20-x) = b+20-2x$ über; also gilt: Bei jedem Arbeitsgang ändert sich die Anzahl der oben blauen Karten um eine gerade Zahl. Die gegebene Ausgangsstellung enthielt genau 9 oben blaue Karten; die in a) angestrebte Endstellung soll keine oben blaue Karte enthalten. Dies ist folglich mit endlich vielen Arbeitsgängen nicht zu erreichen.

---

1 Diese Verallgemeinerung wird vom Schüler nicht verlangt; es genügt in II auch bereits, zu $q = 1$ und zu $q = -\frac{1}{2}$ die Aussage über das arithmetische Mittel jeweils in einem Beispiel von a_1 und k zu bestätigen.

b) Bei jedem Arbeitsgang kann sich die Anzahl der oben blauen Karten höchstens um 20 vergrößern. Die gegebene Ausgangsstellung enthielt genau 9 oben blaue Karten; die in b) angestrebte Endstellung soll 37 oben blaue Karten enthalten. Dies ist folglich in einem Arbeitsgang nicht zu erreichen.
In zwei Arbeitsgängen dagegen ist es folgendermaßen zu erreichen: Man drehe im ersten Arbeitsgang 6 oben blaue und 14 oben rote Karten um. Aus der Ausgangsstellung mit genau 28 oben roten Karten entsteht dabei eine Stellung mit genau
$28 + 6 - 14 = 20$ oben roten Karten. Diese Karten drehe man im zweiten Arbeitsgang um.
Die kleinste Anzahl von Arbeitsgängen, die zum Erhalten der angestrebten Endstellung hinreichend ist, beträgt somit 2.

<u>211236A) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Eine Zahl z mit der genannten Eigenschaft existiert, wenn zwei natürliche Zahlen m und n mit $1000 \leqq \frac{m(m+1)}{2} = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leqq 10000$,
d. h. mit $2000 \leqq m^2 + m = 2(n^2 + n) \leqq 20000$ (1)
existieren. Daß es solche Zahlen gibt, kann man folgendermaßen nachweisen:
Zu der Gleichung

$$m^2 + m = 2(n^2 + n) \tag{2}$$

gewinnt man, ausgehend von $(m;n) = (0;0)$, weitere Lösungen, z. B. folgendermaßen: Es sei $(m;n)$ eine Lösung. Dann ist auch $(m+p;n+q)$ eine Lösung, falls p und q die Gleichung

$$m^2 + 2mp + p^2 + m + p = 2(n^2 + 2nq + q^2 + n + q)$$

erfüllen. Wegen der vorausgesetzten Gültigkeit von (2) trifft dies zu, wenn

$$p(2m + p + 1) = 2q(2n + q + 1)$$

gilt. Das kann sogar erreicht werden, indem man

$$p = 2n + q + 1 \text{ und } 2q = 2m + p + 1$$

erreicht; denn dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$p = 2m + 4n + 3,\ q = 2m + 2n + 2.$$

Damit ist bewiesen[1]: Zu jeder Lösung $(m;n)$ der Gleichung (2) ist auch $(3m + 4n + 3;\ 2m + 3n + 2)$ eine Lösung von (2). Auf diese Weise gewinnt man aus $(0;0)$ der Reihe nach die Lösungen $(3;2)$, $(20;14)$, $(119;84)$. Für die letztgenannte Lösung gilt $119^2 + 119 = 2(84^2 + 84) = 14280$, also ist insgesamt (1) erfüllbar, w.z.b.w. (Man erhält $z = 7140$.)

<u>211236B) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die genannten Darstellungen sind umkehrbar eindeutig den Paaren $(x;y)$ aus jeweils dem kleinsten der drei Summanden und dem kleinsten der zwei übrigen Summanden zugeordnet, d. h. denjenigen Paaren $(x;y)$ ganzzahliger x, y, zu denen jeweils z mit $x+y+z=n$ und $1 \leq x \leq y \leq z$ existiert.

Diese Paare haben folgende Eigenschaften: Es gilt $3x \leq x+y+z = n$, also

$$1 \leq x \leq \frac{n}{3} \qquad (1)$$

und $2y \leq y+z = n-x$, also

$$x \leq y \leq \frac{n-x}{2}. \qquad (2)$$

Umgekehrt gibt es zu jeder ganzen Zahl x mit (1), woraus nämlich $x \leq \frac{n-x}{2}$ folgt, auch ganze Zahlen y mit (2), und zu jedem Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen mit (1), (2) existiert ein z mit $x+y+z = n$ und $1 \leq x \leq y \leq z$, da man für $z = n-x-y$ bestätigt, daß wegen (2) auch $y \leq n-x-y$ gilt.

Also ist A_n die Anzahl aller Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen mit (1),(2).

Hiernach liegt es nahe, die Fälle $n = 6m + k$ mit $k = 0,1,\dots,5$ zu unterscheiden.

Ist $n = 6m$ mit ganzem $m \geq 1$, so kann nach (1) als x jede ganze Zahl von 1 bis $2m$ gewählt werden. Das sind alle geraden Zahlen $x = 2p$, wobei p von 1 bis m läuft, und alle ungeraden Zahlen $x = 2q-1$, wobei q von 1 bis m läuft. Zu $x = 2p$ kann jeweils als y

---

1 Es ist auch zulässig, diese Aussage ohne heuristische Vorüberlegung anzugeben und dann ihre Richtigkeit direkt zu bestätigen: Aus

$m^2 + m = 2(n^2 + n)$ folgt

$$\begin{aligned}(3m+4n+3)^2 + 3m+4n+3 &= 9m^2 + 24mn + 21m + 16n^2 + 28n + 12\\ &= 8m^2 + 24mn + 20m + 18n^2 + 30n + 12\\ &= 2((2m+3n+2)^2 + 2m+3n+2).\end{aligned}$$

Es ist sogar zulässig, ohne jegliche heuristische Hinführung nur die Zahlen $m = 119$, $n = 84$ anzugeben und für sie (1) zu bestätigen.

nach (2) jede ganze Zahl von 2p bis 3m-p gewählt werden; zu $x = 2q-1$ kann jeweils als y jede ganze Zahl von $2q-1$ bis $3m-q$ gewählt werden. Nach dem Satz, daß die Anzahl aller ganzen Zahlen von a bis b (a,b beliebig mit $a \geqq b$ gegeben) gleich $b-a+1$ ist, folgt: Die Anzahl aller Paare (x;y) mit jeweils einem $x = 2p$ beträgt $3m-3p+1$, die Anzahl aller Paare (x;y) mit jeweils einem $x = 2q-1$ beträgt $3m-3q+2$. Berücksichtigt man die angegebenen Werte, die p bzw. q dabei zu durchlaufen hat, so erhält man

$$A_{6m} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+1) + \sum_{q=1}^{m} (3m-3q+2).$$

Wegen

$$\sum_{p=1}^{m} (3m-3p+1) = \sum_{p=1}^{m} (3m+1) - 3 \cdot \sum_{p=1}^{m} p = m \cdot (3m+1) - 3 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{3m^2-m}{2}$$

ergibt sich

$$A_{6m} = 2 \cdot \frac{3m^2 \cdot m}{2} + m = 3m^2. \qquad (3)$$

Im Fall $n = 6m+1$ ($m \geqq 1$) ergibt sich: x ist wählbar von 1 bis 2m, also $x = 2p$ ($p = 1,\ldots,m$) und $x = 2q-1$ ($q = 1,\ldots,m$). Zu $x = 2p$ ist jeweils y wählbar von 2p bis $3m-p$; zu $x = 2q-1$ jeweils von $2q-1$ bis $3m-q+1$. Das führt auf

$$A_{6m+1} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+1) + \sum_{q=1}^{m} (3m-3q+3) = 3m^2 + m. \qquad (4)$$

Entsprechend folgt:

$n = 6m+2$ ($m \geqq 1$): Zu $x = 2p$ ($p = 1,\ldots,m$) und $x = 2q-1$ ($q = 1,\ldots,m$) jeweils y bis $3m-p+1$ bzw. $3m-q+1$, also

$$A_{6m+2} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+2) + \sum_{q=1}^{m} (3m-3q+3) = 3m^2 + 2m. \qquad (5)$$

$n = 6m+3$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x = 2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x = 2q-1$ ($q = 1,\ldots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+1$ bzw. bis $3m-q+2$, also

---

1 Ist $m = 0$, so bedeutet die "Aufzählung" $x = 2p$ ($p = 1,\ldots,m$): Es gibt kein $x = 2p$. Entsprechend ist eine Summe $\sum_{p=1}^{0} (3 \cdot 0 - 2p + c)$ gleich 0 zu setzen. Die oben benutzte Formel

$$\sum_{p=1}^{m} (3m-3p+c) = m \cdot (3m+c) - 3 \cdot \frac{m(m+1)}{2}$$

bleibt daher auch für $m = 0$ anwendbar.

$$A_{6m+3} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+2) + \sum_{q=1}^{m+1} (3m-3q+4) = 3m^2+3m + (3m-3(m+1)+4)$$
$$= 3m^2+3m+1 \ . \qquad (6)$$

$n = 6m+4$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x = 2p$ ($p = 1,\dots,m$) und $x = 2q-1$ ($q=1,\dots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+2$ bzw. bis $3m-q+2$, also

$$A_{6m+4} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+3) + \sum_{q=1}^{m+1} (3m-3q+4) = 3m^2 + 4m+1. \qquad (7)$$

$n = 6m+5$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x = 2p$ ($p = 1,\dots,m$) und $x = 2q-1$ ($q=1,\dots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+2$ bzw. bis $3m-q+3$, also

$$A_{6m+5} = \sum_{p=1}^{m} (3m-3p+3) + \sum_{q=1}^{m+1} (3m-3q+5) = 3m^2+5m+2. \qquad (8)$$

Andererseits ergibt sich in den Fällen $n = 6m+k$ jeweils

$$\frac{n^2}{12} = 3m^2 + mk + \frac{k^2}{12} \quad (k = 0,1,\dots,5). \qquad (9)$$

Aus (3) bis (9) erhält man für $k = 0,1,\dots,5$ der Reihe nach als $\left|A_n - \frac{n^2}{12}\right|$ die Werte $0, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$. Diese sind sämtlich kleiner als $\frac{1}{2}$, w.z.b.w.

<u>Hinweis:</u> Die zu Beginn gegebene Charakterisierung der abzuzählenden Darstellungen durch (1), (2) braucht nicht in der dort genannten Ausführlichkeit als Zuordnung zur Menge von Paaren $(x;y)$ formuliert zu werden. Wichtig ist jedoch auch bei anderer Formulierung eines Abzählungsmodus: 1. Er erfaßt jede Darstellung (Vollständigkeit) und 2. Zwei in der Abzählung auftretende Fälle (wie in der obigen Darstellung zwei Paare $(x;y)$) sind genau dann voneinander verschieden, wenn die damit erfaßten Darstellungen voneinander verschieden sind (Eindeutigkeit). Ferner sei darauf hingewiesen, daß sich durch Verwendung der Funktion $[x]$ (größtes Ganzes $\leqq x$) Beweisschritte einfacher fassen lassen.

---

1 Ist $m = 0$, so bedeutet die "Aufzählung" $x = 2p$ ($p = 1,\dots,m$): Es gibt kein $x = 2p$. Entsprechend ist eine Summe $\sum_{p=1}^{0} (3\cdot 0 - 2p + c)$ gleich 0 zu setzen. Die oben benutzte Formel

$$\sum_{p=1}^{m} (3m-3p+c) = m\cdot(3m+c) - 3\cdot\frac{m(m+1)}{2}$$

bleibt daher auch für $m = 0$ anwendbar.