XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

211221

Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1,2,3,\ldots$.
Ferner werde für $n = 1,2,3,\ldots$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

a) Man ermittle a_1 und d so, daß $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Man beweise, daß für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1,2,3,\ldots$

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right)$$

gilt.

211222

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x}$$

gilt.

211223

Es sei ABCD ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a,b,c,d; sein Flächeninhalt sei F.
Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

<u>211224</u>

Man beweise: Für jede ungerade ganze Zahl $n \geqq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

211221) Lösung: **9 Punkte**

a) Nach Definition ist[1]

$$a_2 = a_1 + d,\quad a_3 = a_1 + 2d,\quad a_4 = a_1 + 3d,$$
$$s_1 = a_1,\quad s_2 = a_1+a_2 = 2a_1+d,\quad s_3 = a_1+a_2+a_3 = 3a_1+3d,$$
$$s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4 = 4a_1 + 6d,$$
$$z_4 = s_1+s_2+s_3+s_4 = 10a_1 + 10d.$$

Daher gilt genau dann $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$, wenn die Gleichungen $4a_1 + 6d = 4$ und $10a_1 + 10d = 15$ gelten, und dies ist genau für

$$a_1 = \frac{5}{2} \text{ und } d = -1$$

der Fall.

b) I. Die zu beweisende Gleichung gilt für $n = 1$; denn es ist

$$z_1 = s_1 = a_1 \text{ und } \frac{1\cdot(1+1)}{2}\left(a_1 + \frac{1-1}{3}d\right) = a_1.$$

II. Wenn die zu beweisende Gleichung für eine natürliche Zahl $n = h \geqq 1$ gilt, d.h. wenn für ein $h \geqq 1$

$$z_h = \frac{h(h+1)}{2}\left(a_1 + \frac{h-1}{3}d\right)$$

gilt, so folgt wegen $z_{h+1} = z_h + s_{h+1}$ und da nach der Formel für arithmetische Reihen

$$s_{h+1} = (h+1)a_1 + \frac{(h+1)h}{2}d \text{ ist,}$$

$$z_{h+1} = \frac{h(h+1)}{2}\left(a_1 + \frac{h-1}{3}d\right) + (h+1)a_1 + \frac{h(h+1)}{2}$$
$$= \frac{h+1}{2}(h+2)a_1 + \frac{h(h+1)}{2}\left(\frac{h-1}{3} + 1\right)d$$
$$= \frac{(h+1)(h+2)}{2}\left(a_1 + \frac{h}{3}d\right),$$

1 Einige der folgenden Gleichungen können auch durch Zitieren bekannter Sätze bzw. durch vorheriges Lösen von Aufgabenteil b) erhalten werden.

d.h. es folgt die Gültigkeit der zu beweisenden Gleichung auch für $n = h+1$.

Mit I. und II. ist die zu beweisende Gleichung durch vollständige Induktion für alle $n = 1,2,3,\ldots$ nachgewiesen.

<u>211222) Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

I. Wenn für eine reelle Zahl x

$$\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x} \tag{1}$$

gilt, so folgt:

Wegen der Existenz der linken Seite von (1) ist $2x^2-1 \geqq 0$, also

$$x^2 = \frac{1}{2}\ ; \tag{2}$$

aus $\sqrt{2x^2 - 1} \geqq 0$ und (1) folgt $\frac{1}{x} > 0$, also

$$x > 0;$$

hiernach folgt aus (2)

$$x \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{3}$$

Wegen $\sqrt{2x^2 - 1} \geqq 0$ folgt aus (1) ferner durch Quadrieren

$$2x^2 - 1 < \frac{1}{x^2}\ ; \tag{4}$$

hieraus folgt wegen $x^2 > 0$

$$2x^4 - x^2 < 1,$$

$$x^4 - \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2},$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 < \frac{9}{16}, \tag{5}$$

$$x^2 - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}\ , \tag{6}$$

$$x^2 < 1\ , \tag{7}$$

$$x < 1\ . \tag{8}$$

Nach (3) und (8) können also nur reelle Zahlen mit

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x < 1 \tag{9}$$

die Ungleichung (1) erfüllen.

II. Wenn x eine reelle Zahl ist, für die (9) gilt, so folgt:

Wegen (8) und $x > 0$ gilt (7), also (6). Aus (9) folgt ferner (2). Daher ist $x^2 - \frac{1}{4} > 0$; also erhält man aus (6) wieder (5) und wegen $x^2 > 0$ auch (4). Wegen $x > 0$ und da nach (2) auch $2x^2 - 1 \geqq 0$ gilt, ergibt sich aus (4), daß (1) erfüllt ist.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x < 1$ gilt, die Ungleichung (1) erfüllen.

<u>2. Lösungsweg:</u> Durch $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ ist für alle x mit $2x^2 - 1 \geqq 0$ eine Funktion f definiert, d.h. für alle diejenigen x, für die entweder $x \leqq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gilt. Für die negativen x ist $\frac{1}{x} < 0 \leqq \sqrt{2x^2 - 1}$, also die geforderte Ungleichung nicht erfüllt. Im Intervall aller $x \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist die Funktion f streng monoton steigend (denn aus $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x_1 < x_2$ folgt $0 \leqq 2x_1^2 - 1 < 2x_2^2 - 1$, also $f(x_1) < f(x_2)$).
Ferner ist in diesem Intervall die durch $g(x) = \frac{1}{x}$ definierte Funktion g streng monoton fallend (denn aus $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x_1 < x_2$ folgt $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$).

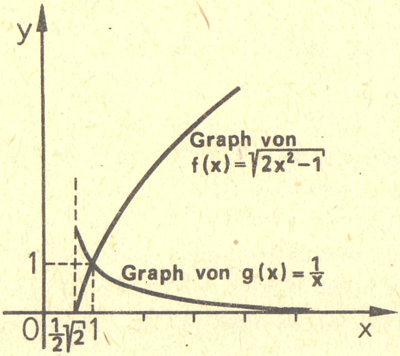

Abb. L 211222

Also haben die Graphen von f und g in diesem Intervall höchstens einen Schnittpunkt. Sie haben, wie die Probe zeigt, den zu x = 1 gehörenden Schnittpunkt (es gilt f(1) = 1 = g(1)).
Hieraus folgt, daß die betrachtete Ungleichung genau im Intervall

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x < 1$$

gilt.

<u>211223) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

In jedem Viereck gibt es mindestens eine Diagonale, die die Fläche des Vierecks in zwei Dreiecksflächen zerlegt.
Die Fläche des Vierecks ABCD werde o.B.d.A. durch die Diagonale AC in die Flächen der Dreiecke ABC und ACD zerlegt.
Ist β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$, so gilt für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABC:

$$F_1 = \frac{1}{2} ab \sin\beta. \qquad (2)$$

Wegen $\sin\beta \leqq 1$ gilt folglich $F_1 \leqq \frac{1}{2}ab$, d.h.

$$F_1 \leqq \frac{1}{4} \cdot 2ab. \qquad (3)$$

Da für beliebige reelle Zahlen a,b die Ungleichung

$$(a-b)^2 \geqq 0 \tag{4}$$

gilt und daraus die Beziehung

$$2ab \leqq a^2 + b^2 \tag{5}$$

folgt, gilt demnach

$$F_1 \leqq \frac{1}{4}(a^2 + b^2). \tag{6}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks ADC

$$F_2 \leqq \frac{1}{4}(c^2 + d^2). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt (1).
Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn es in (6) und (7) gilt. In (6) gilt es genau dann, wenn es in (3) und (5) gilt. In (3) gilt es wegen (2) (und $0^\circ < \beta < 180^\circ$) genau für $\beta = 90^\circ$; in (5) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (4) gilt, und das ist genau für a = b der Fall.
Entsprechend zeigt man, daß das Gleichheitszeichen in (7) genau dann gilt, wenn der Innenwinkel bei D die Größe $\delta = 90^\circ$ hat und c = d gilt.
Somit gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn ABCD durch die Diagonale AC in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, d.h. ein Quadrat ist.

<u>211224) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Nach Voraussetzung ist $n = 2k + 1$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.
Da die Anzahl der Summanden der Summe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

gerade ist (nämlich gleich 2k), und da wegen $k+1 = n-k$ in dieser Summe auf den Summanden $\frac{1}{k}$ der Summand $\frac{1}{n-k}$ folgt, läßt sich die Summe so umformen, daß

$$s = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right),$$

also $s = \frac{n}{n-1} + \frac{n}{2(n-2)} + \dots + \frac{n}{k(n-k)}$,

$$s = n\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)} + \dots + \frac{1}{k(n-k)}\right) \tag{1}$$

gilt.

Da das Produkt $p = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ durch jeden Nenner in (1) teilbar ist, ist das Produkt

$$\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)} + \ldots + \frac{1}{k(n-k)}\right)p$$

eine ganze Zahl und folglich das Produkt $s \cdot p$ eine durch n teilbare ganze Zahl, w.z.b.w.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 12 Gesamtpunktzahl: 40

211221

a)	4 Punkte
b)	5 Punkte
	9 Punkte

211222

I. (Angabe der für (1) notwendigen Bedingung (9))	6 Punkte
II. (Nachweis, daß (9) hinreichend für (1) ist)	3 Punkte
	9 Punkte

211223

$F_1 \leqq \frac{1}{2}$ ab	2 Punkte
Abschätzung (5)	1 Punkt
Abschätzung (6)	2 Punkte
Abschätzung (7)	1 Punkt
Schluß, daß aus (6) und (7) die Beziehung (1) folgt	1 Punkt
Nachweis, daß genau für die Quadrate das Gleichzeichen gilt	3 Punkte
	10 Punkte

211224

Erkenntnis, daß Anzahl der Summanden von s gerade ist	1 Punkt
Gleichung (1)	4 Punkte
Erkenntnis, daß p durch jeden Nenner in (1) teilbar ist	3 Punkte
Schluß darauf, daß sp ganz ist,	2 Punkte
daß sp durch u teilbar ist	2 Punkte
	12 Punkte