krüger

A 10;I

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

211041

Ermitteln Sie alle Paare (a;b) aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden vier Aussagen (1),(2),(3),(4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!

Die Aussagen lauten:

(1) $b \mid (a+1)$,

(2) $a = 2b + 5$,

(3) $3 \mid (a+b)$,

(4) $a+7b$ ist eine Primzahl.

211042

Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X,Y aus M gilt: Der Abstand $\overline{XY}$ zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $\overline{XY} \leq d$.

(2) Es gibt zwei Punkte P,Q aus M, deren Abstand $\overline{PQ} = d$ beträgt.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob man jede Vierecksfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, daß jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat! Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Von den nachstehenden Aufgaben 211043A und 211043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

211043A

In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.
Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man eine Funktion F für alle reellen x durch
$F(x) = f(g(x))$
definieren.
Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind. (Bekanntlich heißt eine Funktion φ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, daß für alle x die Gleichung $\varphi(x+p) = \varphi(x)$ gilt.)
Jens behauptet:
Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.
Dirk behauptet:
Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets F periodisch.
Christa behauptet:
Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.
Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

211043B

Beweisen Sie, daß man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ so verteilen kann, daß für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!
Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

211044

Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor. Nach jedem Wurf muß der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.
Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, daß mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG

gebildet werden können! Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d. h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

211045

Ermitteln Sie alle Mengen $\{a,b,c\}$ aus positiven ganzen Zahlen a,b,c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ die Gleichung

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s$$

erfüllen!

211046

Die Eckpunkte A,B,C,D eines Tetraeders ABCD, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (Abb. A 211046). Die Ebene durch P,Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

A 10;II

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

<u>Arbeitsblatt für 211046</u>

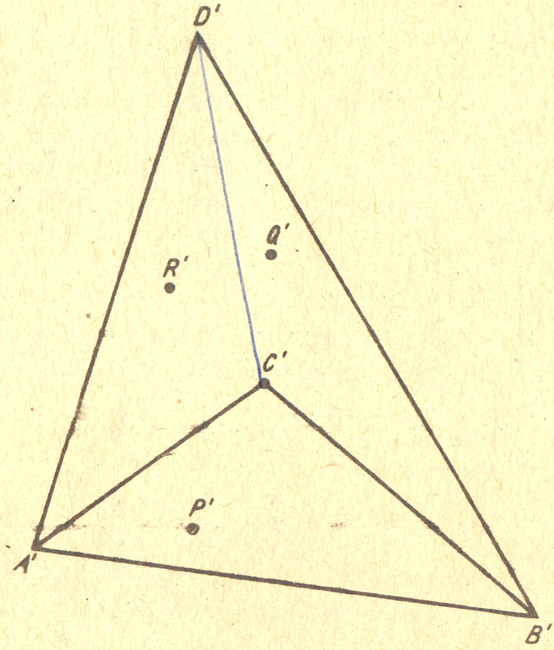

Abb. A 211046

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

211041) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Paar $(a;b)$ positiver ganzer Zahlen a,b die geforderte Eigenschaft hat, so folgt:

Wäre (3) wahr, so gäbe es eine ganze Zahl x mit $a+b = 3x$. Daraus folgte $a - 2b = 3(x-b) \neq 5$ (da 5 nicht durch 3 teilbar ist), also wäre (2) falsch. Ferner folgte $a + 7b = 3(x+2b)$ und (wegen $a > 0$, $b > 0$ auch $x > 0$, also) $x + 2b \geq 1 + 2 \cdot 1 > 1$, so daß $a + 7b$ keine Primzahl wäre; also wäre auch (4) falsch, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß genau eine der Aussagen (1),(2),(3),(4) falsch ist.

Daher ist (3) falsch, und (1),(2),(4) sind wahr. Aus (1) und (2) folgt $b \mid (2b+6)$, also $b \mid 6$. Mithin ist b eine der Zahlen 1, 2, 3, 6. Nach (2) ist a die zu b in der folgenden Tabelle angegebene Zahl, woraus sich der entsprechend angegebene Wert von $a+7b$ ergibt:

b	a	a+7b
1	7	14
2	9	23
3	11	32
6	17	59

Da 14 und 32 keine Primzahlen sind, können folglich nur die Paare (9;2) und (17;6) die geforderte Eigenschaft haben.

II. Sie haben diese Eigenschaft; denn
wegen $2 \mid (9+1)$ bzw. $6 \mid (17+1)$ ist (1) für diese Paare wahr,
wegen $9 = 2 \cdot 2+5$ bzw. $17 = 2 \cdot 6+5$ ist (2) für diese Paare wahr,
wegen $3 \nmid (9+2)$ bzw. $3 \nmid (17+6)$ ist (3) für diese Paare falsch,
wegen $9+7 \cdot 2 = 23$ bzw. $17+7 \cdot 6 = 59$ ist (4) für diese Paare wahr, da 23 und 59 Primzahlen sind.

Daher haben genau die Paare (9;2) und (17;6) die geforderte Eigenschaft.

211042) Lösung: 6 Punkte

Eine Zerlegung der genannten Art ist nicht für jede Vierecksfläche möglich; es gibt nämlich eine Vierecksfläche V mit der Eigenschaft, daß bei jeder Zerlegung von V durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen (mindestens) eine der beiden Teilflächen denselben Durchmesser hat wie V. Eine solche Vierecksfläche V kann man z. B. folgendermaßen erhalten: Man wähle ein gleichseitiges Dreieck ABC; seine Seitenlänge sei d. Einen vierten Punkt D wähle man so, daß ABCD ein Viereck wird und $\overline{AD} \leqq d$, $\overline{BD} \leqq d$, $\overline{CD} \leqq d$ gilt. Beispielsweise kann man, um dies zu erreichen, D auf dem kürzeren A mit C verbindenden Bogen des Kreises um B mit d wählen. Die Fläche V jedes so gebildeten Vierecks ABCD hat die behauptete Eigenschaft; denn es gilt:

(a) V hat den Durchmesser d.

(b) Bei jeder Zerlegung von V durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen F_1, F_2 hat eine der Flächen F_1, F_2 den Durchmesser d.

Beweis zu (a):

(1) Für je zwei Punkte X,Y aus V gilt: Die Gerade durch X,Y hat mit dem Rand von V zwei Punkte S,T gemeinsam, für die $\overline{XY} \leqq \overline{ST}$ gilt. Gibt es sogar zwei solche Punkte S,T, die Eckpunkte von V sind, so ist $\overline{ST} \leqq d$ nach Wahl von V. Andernfalls liegt o.B.d.A. der Punkt S zwischen A und B, und wegen $\overline{\sphericalangle AST} + \overline{\sphericalangle BST} = 180^\circ$ gilt o.B.d.A. $\overline{\sphericalangle AST} \geqq 90^\circ$. Daher ist AT im Dreieck AST die längste Seite, also gilt $\overline{ST} \leqq \overline{AT}$. Indem man nochmals die Fälle unterscheidet, ob die Gerade durch A,T außer A einen Eckpunkt von V enthält oder nicht, und entsprechend wie eben argumentiert, erhält man $\overline{AT} \leqq d$. Damit ist $\overline{XY} \leqq d$ gezeigt.

(2) Es gilt beispielsweise $\overline{AB} = d$.

Beweis zu (b):

Für jede der genannten Zerlegungen gilt: (Mindestens) eine der beiden Teilflächen F_1, F_2 enthält (mindestens) zwei der Punkte A,B,C. Diese Teilfläche hat wegen $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD} = d$ (und wegen des unter (a)(1) Gesagten) den Durchmesser d.

<u>211043A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

(a) Jens hat eine wahre Aussage gemacht.

(b) Dirk hat eine falsche Aussage gemacht.

(c) Christa hat eine falsche Aussage gemacht.

Beweis zu (a): Ist g periodisch, so existiert eine reelle Zahl $p > 0$ derart, daß für alle x die Gleichung $g(x+p) = g(x)$ gilt. Für alle x gilt dann auch die Gleichung $F(x+p) = f(g(x+p)) = f(g(x)) = F(x)$.

Beweis zu (b): Eine nicht periodische Funktion F (mit $F(x) = f(g(x))$ für alle (x) mit periodischer Funktion f liegt etwa in folgendem Beispiel vor:
Es sei $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2^{-x}$, also $F(x) = \sin(2^{-x})$. In der Tat sind f und g nichtkonstant, und es gilt:
(1) f ist periodisch.
(2) F ist nicht periodisch; denn für jedes reelle $p > 0$ gilt $F(0+p) \neq F(0)$. Es ist nämlich $0 < 2^{-p} < 2^{0} < \frac{\pi}{2}$, also, da die Sinusfunktion im Intervall $(0,\frac{\pi}{2})$ streng monoton wächst, $\sin(2^{-p}) < \sin(2^{0})$.

Beweis zu (c): Eine periodische Funktion F (mit $F(x) = f(g(x))$ für alle (x) mit nicht periodischen Funktionen f und g liegt etwa in folgendem Beispiel vor:
Es sei $f(x) = |x|$ und $g(x) = \sin|x|$, also $F(x) = |\sin|x||$. In der Tat sind f und g nichtkonstant, und es gilt:
(1) f ist nicht periodisch; denn für jedes reelle $p > 0$ gilt $f(0+p) = p > 0 = f(0)$.
(2) g ist nicht periodisch. Gäbe es nämlich ein $p > 0$ mit $g(x+p) = g(x)$ für alle x, so folgte $\sin p = \sin|p| = g(0+p) = g(0) = 0$, also $p = k\pi$ mit einer ganzen Zahl k. Wegen $p > 0$ wäre $k \geq 1$, und damit folgte z. B. wegen $-\frac{\pi}{2}+2p = -\frac{\pi}{2}+2k\pi > 0$ der Widerspruch

$$1 = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| = g(-\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2}+p+p) = \sin(-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1.$$

(3) F ist periodisch. Zunächst ist nämlich

$$F(x) = |\sin x| \text{ für alle } x,$$

wie sich für $x \geq 0$ aus $\sin|x| = \sin x$,
für $x < 0$ aus $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$
ergibt. Damit aber erhält man für alle x

$$F(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = F(x).$$

211043B) Lösung: 8 Punkte

Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, für $P_1,\ldots,P_{12}$ die Eckpunkte eines regulären Ikosaeders zu wählen. Das ist ein Körper, der von 20 gleichseitigen Dreiecksflächen so begrenzt wird, daß an jedem seiner 12 Eckpunkte fünf dieser Flächen zusammentreffen, wobei die Neigungswinkel zwischen je zwei benachbarten Flächen einander gleich sind. Zum Beweis, daß bei dieser Wahl von $P_1,\ldots,$ P_{12} die Forderung der Aufgabe erfüllt wird, genügt es zu zeigen, daß die Kantenlänge s eines solchen Ikosaeders größer als r ist[1] (denn außer s kommen als Längen $\overline{P_iP_k}$ nur noch Diagonalenlängen in regulären Fünfecken der Seitenlänge s sowie Kugeldurchmesser vor).

Um $s > r$ nachzuweisen, seien die Ecken eines Ikosaeders wie in Abb. L211043Ba bezeichnet. P_1 und P_{12} sind Endpunkte eines Kugeldurchmessers, $P_2P_3P_4P_5P_6$ und $P_7P_8P_9P_{10}P_{11}$ sind reguläre Fünfecke, beide in Ebenen e_1 bzw. e_2 senkrecht zu P_1P_{12} gelegen. Abb. L211043 Bb zeigt einen ebenen Schnitt durch P_1, P_2, P_{12}. Daraus ist ersichtlich, daß e_1 von P_1 und folglich ebenso e_2 von P_{12} den Abstand $q = \frac{s^2}{2r}$ hat (Kathetensatz für $\triangle P_1P_2P_{12}$). Der genannte Schnitt geht auch durch den Mittelpunkt Q der Strecke P_7P_8. Dieser Punkt ist (sowohl in $\triangle P_7P_8P_{12}$ als auch) in $\triangle P_2P_7P_8$ Höhenfußpunkt, also gilt $h = (\overline{P_{12}Q} =)\ \overline{P_2Q} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ (Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck). Die Parallele durch Q zu P_1P_{12} schneidet das Lot von P_2 auf P_1P_{12} in einem Punkt T, und da h im Dreieck P_2QT Hypotenusenlänge ist, gilt $h \geqq \overline{QT} = 2r - 2q$. Wäre nun $s \leqq r$, so folgte $q \leqq \frac{r}{2}$, $h \geqq 2r-2q \geqq r$ im Widerspruch zu $h \leqq \frac{r}{2}\sqrt{3} < r$. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

---

1 Der Nachweis, daß man $P_1,\ldots,P_{12}$ auf der Kugeloberfläche als Eckpunkte eines regulären Ikosaeders wählen kann, da nämlich umgekehrt zu jedem regulären Ikosaeder eine Kugel durch seine Eckpunkte (Umkugel) existiert, wird vom Schüler nicht verlangt.

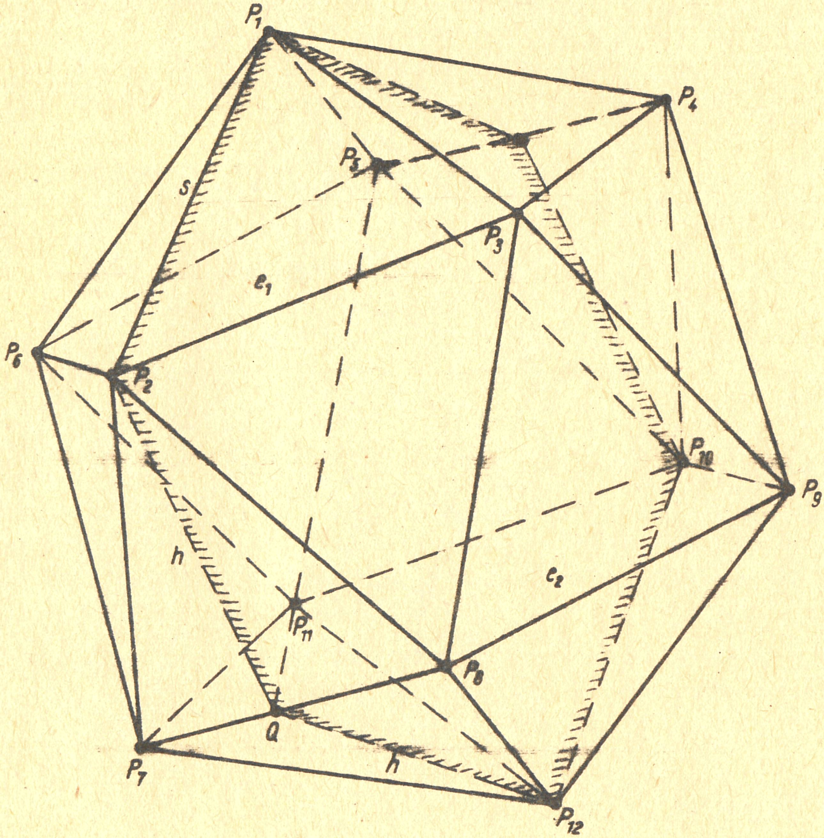

Abb. L211043Ba

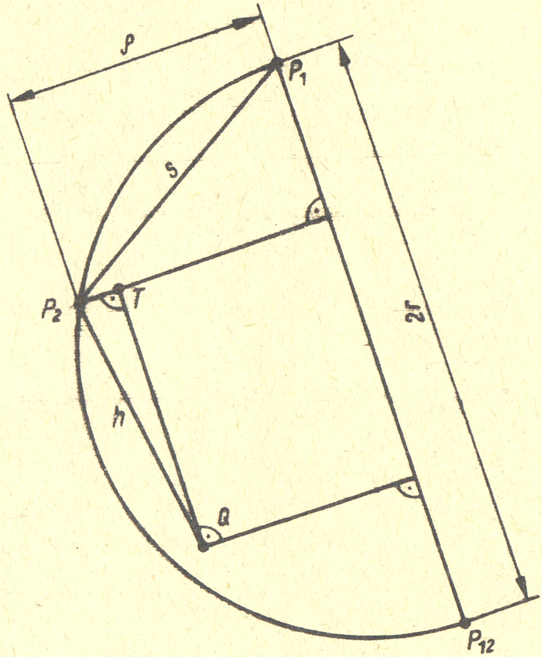

Abb. L211043Bb

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

211044) Lösung: **6 Punkte**

Eine Angabe der Form $\begin{array}{l}(x_1,\ldots,x_i)\\(y_1,\ldots,y_j)\\(z_1,\ldots,z_k)\end{array}$

bedeute, daß die Buchstaben $x_1,\ldots,x_i$ auf dem ersten, $y_1,\ldots,y_j$ auf dem zweiten und $z_1,\ldots,z_k$ auf dem dritten Würfel vorkommen.

I. Wenn eine Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt: Wegen des Vorkommens von BEI gilt o.B.d.A. $\begin{array}{l}(B)\\(E)\\(I)\end{array}$. Wegen des Vorkommens von BEN folgt dann $\begin{array}{l}(B\ )\\(E\ )\\(IN)\end{array}$. Wegen des Vorkommens von NOT gibt es nur die folgenden Möglichkeiten (1), (2), in denen wegen TOR, GER und IST nur die Verteilungen (1) $\begin{array}{l}(BOGS)\\(ET\ \ )\\(INR\ )\end{array}$, (2) $\begin{array}{l}(BTG)\\(EOS)\\(INR)\end{array}$ verbleiben. Wegen ZUG gibt es nur die vier Möglichkeiten

(1.1) $\begin{array}{l}(BOGS)\\(ETZ\ )\\(INRU)\end{array}$, (1.2) $\begin{array}{l}(BOGS)\\(ETU\ )\\(INRZ)\end{array}$, (2.1) $\begin{array}{l}(BTG\ )\\(EOSZ)\\(INRU)\end{array}$, (2.2) $\begin{array}{l}(BTG\ )\\(EOSU)\\(INRZ)\end{array}$.

Wegen AUF gibt es nur die acht folgenden Möglichkeiten:

(1.1.1) $\begin{array}{l}(BOGSA)\\(ETZF\ )\\(INRU\ )\end{array}$, (1.1.2) $\begin{array}{l}(BOGSF)\\(ETZA\ )\\(INRU\ )\end{array}$, (1.2.1) $\begin{array}{l}(BOGSA)\\(ETU\ \ )\\(INRZF)\end{array}$, (1.2.2) $\begin{array}{l}(BOGSF)\\(ETU\ \ )\\(INRZA)\end{array}$,

(2.1.1) $\begin{array}{l}(BTGA\ )\\(EOSZF)\\(INRU\ )\end{array}$, (2.1.2) $\begin{array}{l}(BTGF\ )\\(EOSZA)\\(INRU\ )\end{array}$, (2.2.1) $\begin{array}{l}(BTGA\ )\\(EOSU\ )\\(INRZF)\end{array}$, (2.2.2) $\begin{array}{l}(BTGF\ )\\(EOSU\ )\\(INRZA)\end{array}$.

Wegen IDA (oder MAN) scheiden davon (1.2.2) und (2.2.2) aus. Ferner scheiden (1.1.2) und (2.1.1) aus, da bei ihnen wegen IDA und MAN die beiden Buchstaben D und M zusammen auf einen Würfel kommen müßten, der bereits 5 Buchstaben enthält. In den übrigen Fällen verbleiben für IDA und MAN die Verteilungen

(1.1.1) $\begin{array}{l}(BOGSA\ )\\(ETZFDM)\\(INRU\ \ )\end{array}$, (1.2.1) $\begin{array}{l}(BOGSA)\\(ETUDM)\\(INRZF)\end{array}$, (2.1.2) $\begin{array}{l}(BTGFDM)\\(EOSZA\ )\\(INRU\ \ )\end{array}$,

(2.2.1) $\begin{array}{l}(BTGA\ \ )\\(EOSUDM)\\(INRZF\ )\end{array}$.

Wegen CUP scheiden von ihnen weiterhin (1.1.1) und (2.1.2) aus, da bei diesen Verteilungen einer der Buchstaben C,P auf einem Würfel stehen müßte, der bereits mit sechs anderen Buchstaben besetzt ist. Mit entsprechender Begründung scheidet schließlich auch (2.2.1) wegen des Vorkommens von ICH aus. In der einzigen somit verbliebenen Verteilung (1.2.1) folgt nun aus dem Vorkommen von CUP und ICH, daß C nur auf dem ersten Würfel stehen kann und hiernach nur die Möglichkeit

(BOGSAC)
(ETUDMH) verbleibt.
(INRZFP)

II. Bei dieser Verteilung können alle geforderten Wörter gebildet werden. Daher ist eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel in der geforderten Weise möglich; und zwar geht aus den Angaben eindeutig die zuletzt genannte Verteilung hervor.

211045) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, eine Menge $\{a,b,c\}$ habe die geforderte Eigenschaft. Mit a,b,c ist dann auch s positiv. Ferner sei o.B.d.A.

$$0 < a \leqq b \leqq c \tag{1}$$

angenommen sowie $s-a = x$, $s-b = y$, $s-c = z$ gesetzt, womit man $x+y+z = 3s-(a+b+c) = s$ und wegen (1) auch $x \geqq y \geqq z$ erhält. Wäre $z = 0$, so folgte aus der geforderten Gleichung der Widerspruch $s=0$. Wäre $z < 0$, so wäre wegen $s > 0$ und der Existenz der Wurzel $\sqrt{sxyz}$ auch $y \leqq 0$, und es folgte der Widerspruch $a = s-x = y+z < 0$. Also gilt

$$x \geqq y \geqq z > 0. \tag{2}$$

Aus der geforderten Gleichung

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z)$$

folgt nun $(x+y+z)xyz = 4\,(x+y+z)^2$, wegen $x+y+z \neq 0$ also

$$xyz = 4(x+y+z). \tag{3}$$

Wäre s nicht ganzzahlig, so wäre s ein ungeradzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2}$. Dasselbe würde für x,y und z zutreffen. Daher wäre einerseits xyz ein ungeradzahliges Vielfaches von $\frac{1}{8}$, andererseits aber $4(x+y+z)$ ganzzahlig, im Widerspruch zu (3). Also sind s und damit auch x,y,z ganzzahlig.

L 10;II

Der weitere Lösungsverlauf kann wie in Aufgabe 211031 erfolgen[1]:

Aus

$$x(yz-4) = 4(y+z) \qquad (4)$$

folgt wegen $x > 0$, $4(y+z) > 0$, daß $yz > 4$ sein muß, also

alle Paare (y,z) mit $z = 1$, $y \leq 4$

sowie das Paar (y,z) mit $z = 2$, $y = 2$

ausscheiden. Ferner folgt $xyz \leq 4 \cdot 3x$, also $yz \leq 12$; daher scheiden

alle Paare (y,z) mit $z = 1$, $y > 12$

sowie alle Paare (y,z) mit $z = 2$, $y > 6$

und alle Paare (y,z) mit $z \geq 3$, $y > 4$

aus. Von den verbleibenden Paaren sind in der folgenden Tabelle für genau diejenigen, zu denen eine ganzzahlige Lösung x von (4) existiert, die auch (2) erfüllt, dieser Wert x sowie die Werte $s=x+y+z$, $a=s-x$, $b=s-y$, $c=s-z$ angegeben:

y	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	3	4
z	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
x	24	14	-	9	-	-	-	-	10	6	-	-	-	-
s	30	21		18					15	12				
a	6	7		9					5	6				
b	25	15		10					12	8				
c	29	20		17					13	10				

Daher können nur die Mengen

$$\{6,25,29\}, \{7,15,20\}, \{9,10,17\}, \{5,12,13\}, \{6,8,10\} \qquad (5)$$

die geforderte Eigenschaft haben.

II. Sie haben diese Eigenschaft; denn zu ihnen gehört jeweils als s der Wert $\frac{1}{2}(6+25+29)=30$, $\frac{1}{2}(7+15+20)=21$, $\frac{1}{2}(9+10+17)=18$, $\frac{1}{2}(5+12+13)=15$, $\frac{1}{2}(6+8+10)=12$, und es gilt

$\sqrt{30 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 1}=2 \cdot 30$, $\sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1}=2 \cdot 21$, $\sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1}=2 \cdot 18$,

$\sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2}=2 \cdot 15$, $\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}=2 \cdot 12$.

Somit haben genau die in (5) angegebenen Mengen die verlangte Eigenschaft.

---

1 Der Schluß von (2), (3) auf die (x,y,z) der Tabelle kann also auch als Zitat aus Aufgabe 211031 angegeben werden.

211046) Lösung: 7 Punkte

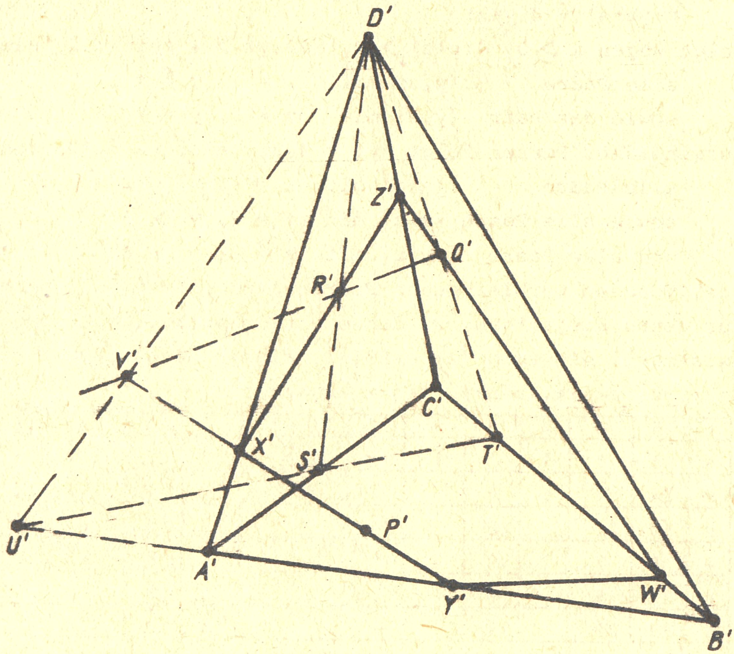

Abb. L 211046

I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert die Gerade durch D',R' und bringt sie zum Schnitt S' mit A'C'.

(2) Man konstruiert die Gerade durch D',Q' und bringt sie zum Schnitt T' mit B'C'.

(3) Man konstruiert die Gerade durch S',T' und bringt sie zum Schnitt U' mit der Geraden durch A',B'.

(4) Man konstruiert die Gerade durch R',Q' und bringt sie zum Schnitt V' mit D'U'.

(5) Man konstruiert die Gerade durch V',P' und bringt sie zum Schnitt X' mit A'D' und zum Schnitt Y' mit A'B'.

(6) Man konstruiert die Gerade durch X',R' und bringt sie zum Schnitt Z' mit C'D'.

(7) Man konstruiert die Gerade durch Z',Q' und bringt sie zum Schnitt W' mit B'C'.

II. Beweis, daß die so konstruierte Figur Y'X'Z'W' die Projektion der Schnittfigur ist:

Die Gerade durch D,R verläuft durch die Seitenfläche ACD; sie schneidet daher AC in einem Punkte S. Folglich ist der in (1) konstruierte Punkt S' der Bildpunkt von S.

Die Gerade durch D,Q verläuft durch die Seitenfläche BCD; sie schneidet daher BC in einem Punkte T. Folglich ist der in (2) konstruierte Punkt T' der Bildpunkt von T.

Die Gerade durch S,T liegt in der Ebene durch A,B,C; wie die Konstruktion ergibt, ist sie auch nicht parallel zu AB((denn aus ST $\parallel$ AB würde auch S'T' $\parallel$ A'B' folgen). Also schneidet sie die Gerade durch A,B in einem Punkt U. Folglich ist der in (3) konstruierte Punkt U' der Bildpunkt von U.

Die Punkte S,T und U liegen nach ihrer Definition in der Ebene durch D,R,Q; denn S liegt auf der Geraden durch D,R; T liegt auf der Geraden durch D,Q; U liegt auf der Geraden durch S,T. Wie die Konstruktion ergibt, ist ferner die Gerade durch R,Q nicht parallel zu DU. Also schneidet die Gerade durch R,Q die (Gerade durch D,U und sogar, wie die Konstruktion zeigt, die) Strecke DU in einem Punkt V. Folglich ist der in (4) konstruierte Punkt V' der Bildpunkt von V.

Der Punkt V liegt nach seiner Definition auf der Geraden durch R,Q, also in der Ebene e durch P,Q,R. Andererseits liegt V auch auf DU, also wie die Punkte D und U in der Ebene c durch A,B,D. Folglich ist V ein Punkt der Schnittgeraden von e mit c. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden ist P. Daher ist die Gerade durch V,P diese Schnittgerade. Sie verläuft, wie die Konstruktion (5) zeigt, so in der Ebene c, daß sie AD in einem Punkt X und AB in einem Punkt Y schneidet. Folglich sind die in (5) konstruierten Punkte X' und Y' die Bildpunkte von X bzw. Y.

Der Punkt X liegt nach seiner Definition sowohl in e als auch auf AD, also in der Ebene b durch A,C,D. Folglich ist X ein Punkt der Schnittgeraden von e mit b. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden ist R. Daher ist die Gerade durch X,R diese Schnittgerade. Sie verläuft, wie die Konstruktion (6) zeigt, so in der Ebene b,

daß sie CD in einem Punkt Z schneidet. Folglich ist der in (6) konstruierte Punkt Z' der Bildpunkt von Z.
Der Punkt Z liegt nach seiner Definition sowohl in e als auch auf CD, also in der Ebene a durch B,C,D. Folglich ist Z ein Punkt der Schnittgeraden von e mit a. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden ist Q. Daher ist die Gerade durch Z,Q diese Schnittgerade. Sie verläuft, wie die Konstruktion (7) zeigt, so in der Ebene a, daß sie BC in einem Punkt W schneidet. Folglich ist der in (7) konstruierte Punkt W' der Bildpunkt von W.
Die Punkte Y und W liegen sowohl in e als auch in der Ebene d durch A,B,C. Also ist die Gerade durch Y,W die Schnittgerade von e mit d.
Die vier Strecken YX, XZ, ZW und WY, die folglich der Schnittfigur angehören, bilden ein geschlossenes Vieleck und sind somit die gesamte Schnittfigur; das Viereck Y'X'Z'W' ist folglich dessen gesuchte Projektion.