XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

211031

Ermitteln Sie alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!

(1) Es gilt $0 < a \leqq b \leqq c$.

(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

211032

Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)! Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = 1.$$

211033

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a;b) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6,6,$$
$$[2a] + 3b = 11,9.$$

<u>Hinweis:</u> Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leqq r < g+1$ gilt. So ist z. B.

$[4{,}01] = 4$, da $4 \leqq 4{,}01 < 5$ gilt,

$[7] = 7$, da $7 \leqq 7 < 8$ gilt,

$[-\pi] = -4$, da $-4 \leqq -\pi < -3$ gilt.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

211034

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1$$

erfüllen!

211035

In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:

"Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile usw.

Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?"

Als Lösung mußte bewiesen werden, daß es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

211036

Die Eckpunkte A,B,C,D eines Tetraeders ABCD und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A',B',C',D' bzw. P' haben. Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q'

bzw. R'. Die Ebene durch P,Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

<u>Arbeitsblatt zu 211036</u>

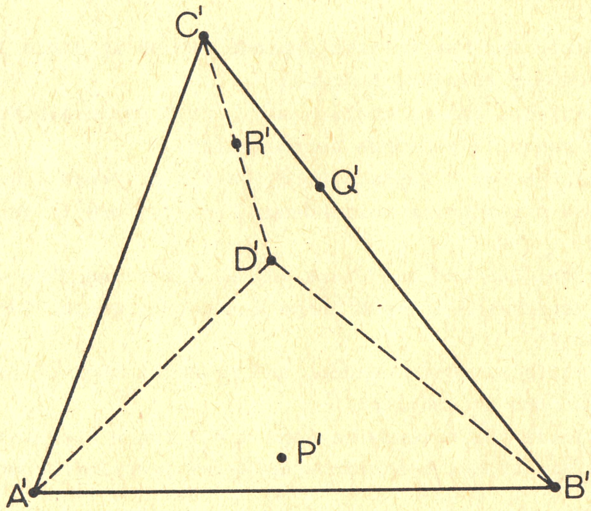

Abb. A 211036

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

211031) Lösung: 6 Punkte

Die Eigenschaft (2) ist gleichbedeutend mit

$abc = 4(a + b + c)$. (3)

I. Wenn für ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen (1) und (3) gelten, so folgt $c(ab - 4) = 4(a + b)$, (4)

wegen $c > 0$, $4(a + b) > 0$, also $ab > 4$.

Daher scheiden alle Paare (a,b) mit $a = 1$, $b \leqq 4$

sowie das Paar (a,b) mit $a = 2$, $b = 2$ aus.

Ferner folgt $abc \leqq 4 \cdot 3c$, also $ab \leqq 12$.

Daher scheiden alle Paare (a,b) mit $a = 1$, $b > 12$

sowie alle Paare (a,b) mit $a = 2$, $b > 6$

und alle Paare (a,b) mit $a \geqq 3$, $b > 4$ aus.

Zu den verbleibenden Paaren ist in der folgenden Tabelle für genau diejenigen, zu denen eine ganzzahlige Lösung c von (4) existiert, die auch (1) erfüllt, dieser Wert c angegeben:

a	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
b	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	3	4
c	24	14	-	9	-	-	-	-	10	6	-	-	-	-

Daher können nur die Tripel

$(1,5,24)$, $(1,6,14)$, $(1,8,9)$, $(2,3,10)$, $(2,4,6)$ (5)

die Eigenschaften (1) und (3) haben.

II. Sie haben die Eigenschaft (1) und, da für sie sowohl abc als auch $4(a+b+c)$ jeweils die Zahl

120, 84, 72, 60 bzw. 48

ist, auch die Eigenschaft (3).

Somit haben genau die in (5) angegebenen Tripel die verlangten Eigenschaften.

211032) Lösung: 7 Punkte

Die Fußpunkte der Lote von A,B,C auf g seien A',B' bzw. C'. Nach Voraussetzung fällt keiner der Punkte E,F,G mit einer der Ecken A,B,C zusammen; g enthält keine dieser Ecken, also ist auch $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$, so daß alle im folgenden genannten Divisionen ausgeführt werden können.

Nach dem Strahlensatz (angewandt auf g und die Gerade durch B,C, die von den Parallelen BB', CC' geschnitten werden) gilt

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}.$$

Entsprechend folgt

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}},$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander und kürzt auf der rechten Seite, so erhält man die zu beweisende Gleichung.

Hinweis: Die Unterscheidung, ob g die Verlängerung von AB über A oder über B hinaus schneidet, spielt für die hier gewählte Beweisführung keine Rolle. Bei anderen Beweisansätzen kann dies anders sein.

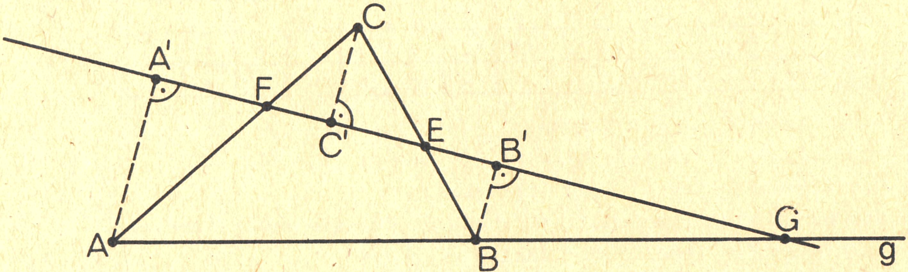

Abb. L 211032

211033) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, ein Paar $(a;b)$ reeller Zahlen erfülle das genannte Gleichungssystem.

Es sei $[a] = g$. Dann ist g ganzzahlig, und es gilt
$g \leqq a < g+1$.

Ist sogar

$$g \leqq a < g+\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

so folgt $2g \leqq 2a < 2g+1$, also $[2a] = 2g$ und damit

$$g + 2b = 6,6, \qquad (2)$$

$$2g + 3b = 11,9. \qquad (3)$$

Multipliziert man (2) mit 2 und subtrahiert (3), so folgt $b = 1,3$, nach (2) also $g = 4$. Wegen (1) erfüllt a daher die Ungleichung $4 \leqq a < 4,5$.

Ist aber

$$g + \frac{1}{2} \leqq a < g + 1, \qquad (4)$$

so folgt $2g+1 = 2a < 2g+2$, also $[2a] = 2g+1$ und damit

$$g + 2b = 6,6, \qquad (5)$$

$$2g+1 + 3b = 11,9. \qquad (6)$$

Multipliziert man (5) mit 2 und subtrahiert (6), so folgt $b = 2,3$, nach (5) also $g = 2$. Wegen (4) erfüllt a daher die Ungleichung $2,5 \leqq a < 3$.

Daher können nur diejenigen Paare $(a;b)$ reeller Zahlen die geforderte Eigenschaft haben, für die entweder

$$4 \leqq a < 4,5 \text{ und } b = 1,3 \qquad (7)$$

oder

$$2,5 \leqq a < 3 \quad \text{und } b = 2,3 \qquad (8)$$

gilt.

II. Umgekehrt erhält man: Wenn ein Paar $(a;b)$ die Bedingungen (7) erfüllt, so ist $[a] = 4$ sowie $8 \leqq 2a < 9$, also $[2a] = 8$ und damit $[a] + 2b = 4 + 2\cdot 1,3 = 6,6$ sowie $[2a] + 3b = 8 + 3\cdot 1,3 =$ $= 11,9$; wenn ein Paar $(a;b)$ die Bedingungen (8) erfüllt, so ist $[a] = 2$ sowie $5 \leqq 2a < 6$, also $[2a] = 5$ und damit
$[a] + 2b = 2 + 2\cdot 2,3 = 6,6$ sowie
$[2a] + 3b = 5 + 3\cdot 2,3 = 11,9$.

Daher erfüllen genau die in (7) und (8) angegebenen Paare das geforderte Gleichungssystem.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

211034) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine reelle Zahl x die geforderte Ungleichung erfüllt, so folgt:

Da $\sqrt{1 - 3x^2}$ existiert, gilt

$$1 - 3x^2 \geq 0, \tag{1}$$

also

$$x^2 \leq \frac{1}{3}; \tag{2}$$

da $\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x}$ existiert, gilt $x \neq 0$. Aus (2) folgt

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

sowie $-x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, also

$$x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Im Falle $x > 0$ folgt darüber hinaus durch Multiplikation der geforderten Ungleichung mit x

$$1 - \sqrt{1 - 3x^2} < x, \tag{4}$$

also

$$1 - x < \sqrt{1 - 3x^2} ; \tag{5}$$

wegen (3) ist $x < 1$, also $1 - x > 0$. Hieraus und aus (5) ergibt sich

$$(1 - x)^2 < 1 - 3x^2, \tag{6}$$

also

$$4x^2 < 2x, \tag{7}$$

woraus wegen $x > 0$

$$x < \frac{1}{2} \tag{8}$$

folgt.

Daher können nur reelle Zahlen x, für die entweder

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 0 \tag{9}$$

oder

$$0 < x < \frac{1}{2} \tag{10}$$

gilt, die geforderte Ungleichung erfüllen.

II. Umgekehrt folgt für jedes reelle x mit (9): Wegen $0 < -x \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gilt (2) und daher (1). Also existiert $\sqrt{1 - 3x^2}$ und wegen $x \neq 0$ auch $\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x}$. Ferner ist $1 - 3x^2 < 1$, also $\sqrt{1 - 3x^2} < 1$, $1 - \sqrt{1 - 3x^2} > 0$; hieraus und aus $x < 0$ folgt $\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 0$ und daher erst recht die geforderte Ungleichung.

Für jedes reelle x mit (10) folgt erst recht (3), wegen $x > 0$ also (2) und daher (1). Also existiert $\sqrt{1 - 3x^2}$ und wegen $x \neq 0$ auch $\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x}$. Aus (8) und $x > 0$ folgt ferner der Reihe nach (7), (6), (5), (4) und daraus wegen $x > 0$ die geforderte Ungleichung.

Hinweis zur Korrektur: Zur Entscheidung, ob Teilschritte ausreichend begründet sind, sind häufig folgende Zusammenhänge zu beachten:

Aus $a < b$ und $a \geqq 0$ folgt $a^2 < b^2$.
Aus ($s \geqq 0$, damit $\sqrt{s}$ existiert), $r < \sqrt{s}$ und $r \geqq 0$ folgt $r^2 < s$.
Aus ($u \geqq 0$, damit $\sqrt{u}$ existiert, und) $\sqrt{u} < v$ folgt $u < v^2$.
Aus $a^2 < b^2$ und $b \geqq 0$ folgt $a < b$.
Aus $r^2 < s$ folgt (die Existenz von $\sqrt{s}$ und) $r < \sqrt{s}$.
Aus $u < v^2$ und $u \geqq 0$ und $v \geqq 0$ folgt $\sqrt{u} < v$.

Weitere Bedingungen sind jeweils zur ausreichenden Begründung des betreffenden Schlusses nicht erforderlich. Geht jedoch jeweils eine der hier genannten Bedingungen der Form ... $\geqq 0$ nicht aus dem Text hervor, so ist der betreffende Schluß nicht ausreichend begründet.

211035) Lösung: 7 Punkte

Für jede natürliche Zahl n mit $1 \leqq n < 1976$ gilt: Da zu Beginn n Papierstücke vorliegen und bei jeder Teilung $n - 1$ Papierstücke hinzukommen, ist 1976 genau dann auf die vorgeschriebene Weise erreichbar, wenn eine natürliche Zahl k existiert, für die
$1976 = n + k\,(n-1)$ gilt.

Diese Gleichung ist äquivalent mit $1975 = (n-1)(k+1)$. Also ist die Anzahl 1976 genau dann erreichbar, wenn 1975 durch $n-1$ teilbar ist.

Wegen der Primfaktorzerlegung 1975 = 5 · 5 · 79 trifft dies genau dann zu, wenn n-1 (< 1975) eine der Zahlen

1; 5; 25; 79; 395

ist, d. h. genau dann, wenn n eine der Zahlen

2; 6; 26; 80; 396

ist.

211036) Lösung: 6 Punkte

I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert die Gerade durch Q',P' und bringt sie zum Schnitt S' mit A'B'.

(2) Man konstruiert die Gerade durch R',Q' und bringt sie zum Schnitt T' mit der Geraden durch B',D'.

(3) Man konstruiert die Gerade durch S',T' und bringt sie zum Schnitt U' mit A'D'.

(4) Man konstruiert die Strecke R'U'.

II. Beweis, daß die so konstruierte Figur R'Q'S'U' die Projektion der Schnittfigur ist:

Die Gerade durch Q,P liegt in der Ebene e durch P,Q,R. Sie verläuft außerdem durch die Seitenfläche ABC; daher schneidet sie den Rand von ABC in einem weiteren Punkt S, der zu e gehört. Folglich ist der in (1) konstruierte Punkt S' der Bildpunkt von S, und S liegt, wie die Konstruktion ergibt, auf AB.

Die Gerade durch R,Q liegt sowohl in e als auch in der Ebene durch B,C,D. Wie die Konstruktion ergibt, ist sie auch nicht parallel zu BD (denn aus RQ ∥ BD würde auch R'Q' ∥ B'D' folgen). Also schneidet sie die Gerade durch B,D in einem Punkte T, der zu e gehört. Folglich ist der in (2) konstruierte Punkt T' der Bildpunkt von T.

Die Punkte S und T liegen sowohl in e als auch in der Ebene durch A,B,D; denn S liegt auf der Geraden durch A,B; T liegt auf der Geraden durch B,D. Wie die Konstruktion ergibt, ist ferner die Gerade durch S,T nicht parallel zu AD. Also schneidet die Gerade durch S,T die (Gerade durch A,D und sogar, wie die Konstruktion zeigt, die) Strecke AD in einem Punkte U, der zu e gehört. Folglich ist der in (3) konstruierte Punkt U' der Bildpunkt von U.

L 10;II

Die Strecke RQ liegt sowohl in e als auch in der Seitenfläche BCD, sie gehört also der Schnittfigur an. Ebenso gehören QS, SU und UR der Schnittfigur an. Diese vier Strecken bilden ein geschlossenes Vieleck und sind somit die gesamte Schnittfigur; das Viereck R'Q'S'U' ist folglich deren gesuchte Projektion.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Die Beweisführung braucht nicht in der angegebenen Ausführlichkeit gefordert zu werden. Wichtig ist jedoch der Nachweis (bzw. bei anderen Konstruktionsansätzen ein analoger Beweisteil) dafür, daß S,T,A,D in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dadurch wird nämlich für die Gerade durch S,T und die Gerade durch A,D nachgewiesen, daß sie nicht windschief sind, also (wegen ST $\nparallel$ AD) einen Schnittpunkt U haben müssen, als dessen Projektion der in (3) konstruierte Punkt U' dann überhaupt erst gedeutet werden kann.

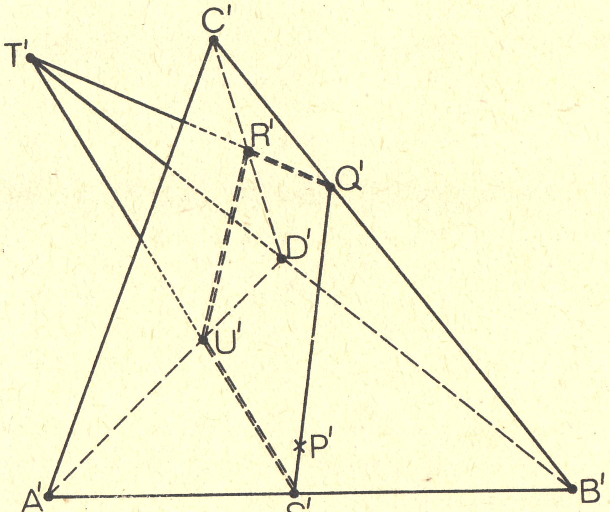

Abb. L 211036