XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>211021</u>

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB. Für den Höhenfußpunkt D gilt $\overline{AD} < \overline{DB}$.
In welchem Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DB}$ teilt er die Hypotenuse?

<u>211022</u>

Über das Ergebnis eines 100m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:
(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.
(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.
(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.
(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, daß
a) alle vier Aussagen (1) bis (4),
b) genau drei dieser Aussagen,
c) genau zwei dieser Aussagen,
d) genau eine dieser Aussagen,
e) keine dieser Aussagen
gleichzeitig wahr sind!

<u>211023</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x,y, für die

$$x^2 - y^2 = 1981$$

gilt!

211024

Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.

Beweisen Sie, daß die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

211021) Lösung: **8 Punkte**

Für die Längen $\overline{AB} = c$, $\overline{DC} = h$, $\overline{AD} = q$, $\overline{DB} = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \qquad (1)$$

sowie

$$p + q = c \qquad (2)$$

und

$$q < p. \qquad (3)$$

Ferner gilt nach dem Höhensatz

$$pq = h^2. \qquad (4)$$

Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2, \qquad (5)$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$p(c - p) = \frac{4}{25}c^2,$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2}$$

$$= \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25 - 16)}$$

$$= \frac{c}{10}(5 \pm 3),$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$

oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{4}{5}c$.

Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $\overline{AD}:\overline{DB} = q:p = 1:4$.

Hinweis zur Korrektur: Aus der Aufgabenstellung kann die Existenz eines Dreiecks mit den genannten Eigenschaften entnommen werden. Daher ist eine Probe oder ein konstruktiver Existenznachweis nicht erforderlich.

211022) Lösung: 10 Punkte

a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (1) falsch. Daher ist es nicht möglich, daß alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, daß die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A,B,C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) BAxCxx (genau (1), (2) und (4) sind wahr),
zu c) xAxCBx (genau (2) und (4) sind wahr),
zu d) BACxxx (genau (1) ist wahr),
zu e) CAxBxx (alle Aussagen sind falsch).

211023) Lösung: 10 Punkte

Ein Paar (x;y) ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es

$$(x - y)(x + y) = 1981 \qquad (1)$$

erfüllt. Wegen der Primzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen x-y und x+y genau die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, daß nur die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen x-y bzw. x+y ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, daß sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

x-y	x+y	x	y
1	1981	991	990
-1	-1981	-991	-990
1981	1	991	-990
-1981	-1	-991	990
7	283	145	138
-7	-283	-145	-138
283	7	145	-138
-283	-7	-145	138

Daher haben genau die Paare (991;990), (-991;-990), (991;-990), (-991;990), (145;138), (-145;-138), (-145;138), (145;-138) die verlangte Eigenschaft.

211024) Lösung: 12 Punkte

Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF. Wegen
$\overline{\sphericalangle FCA}+\overline{\sphericalangle ACB}+\overline{\sphericalangle BCE} = 45^\circ+90^\circ+45^\circ = 180^\circ$ liegt C auf der Geraden durch E und F.

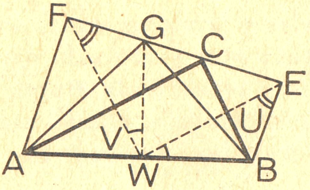

Abb. L 211024

1. Lösungsfortsetzung: Die Mittelpunkte von BC, CA, AB seien U,V bzw. W. Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes von Thales durch C, ist also der Umkreis des Dreiecks ABC. Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC. Somit ist WUCV ein Rechteck; E, F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV, und es gilt[1]:

$$\overline{WE} = \overline{WU} + \overline{UE} = \overline{WU} + \overline{UC} = \overline{WV} + \overline{VC} = \overline{WV} + \overline{VF} = \overline{WF}. \qquad (1)$$

Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G. Dann gilt

$$\overline{\sphericalangle FWG} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle AWV} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle WBU} = \overline{\sphericalangle EWB} \qquad (2)$$

und

$$\overline{\sphericalangle GFW} = 45^\circ = \overline{\sphericalangle BEW}. \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\Delta FGW \cong \Delta EBW$, also $\overline{WG} = \overline{WB}$. Daher ist ΔABG das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E, F, w.z.b.w.

2. Lösungsfortsetzung: Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt C auf einem Halbkreis über AB. Dieser schneidet (oder berührt) die Gerade durch E und F in C und einen hiermit definierten Punkt G (Schnitt in $G \neq C$, falls $EF \nparallel AB$, Berührung in $G = C$, falls $EF \parallel AB$). Für diesen gilt nach dem Peripheriewinkelsatz[2] $\overline{\sphericalangle ABG} = \overline{\sphericalangle ACF} = 45^\circ$. Ferner ist nach dem Satz von Thales $\overline{\sphericalangle AGB} = 90^\circ$.

1 Nach den vorangehenden Feststellungen kann die folgende Gleichung $\overline{WE} = \overline{WF}$ auch aus $\overline{\sphericalangle EFW} = 45^\circ = \overline{\sphericalangle FEW}$ geschlossen werden.

2 (im Fall $EF \parallel AB$ nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz)

Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Da die Figur recht verschiedenartige Möglichkeiten zu Schlußfolgerungen bietet, können in Schülerlösungen noch weitere sehr unterschiedliche Beweisansätze auftreten. Zu deren Einschätzung beachte man:
Beweisversuche, die nur auf Winkelrelationen zurückgreifen, ohne Streckenkongruenzen zu verwenden (explizit oder - wie z.B. der Peripheriewinkelsatz - implizit, indem die betreffende Winkelrelation im Beweis auf Streckenkongruenzen beruht), können nicht zum Ziel führen. Als Beispiel sei etwa folgender "Beweis"-Ansatz angeführt:
"Wegen $\overline{\sphericalangle AFG} = 90^\circ$" ist dann $\overline{\sphericalangle AGF} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle FAG} = 90^\circ - \alpha$ und
"wegen $\overline{\sphericalangle BCG} = 135^\circ$" weiter $\overline{\sphericalangle BGC} = 45^\circ - \overline{\sphericalangle CBG} = 90^\circ - \beta = \alpha$,
also $\overline{\sphericalangle AGF} + \overline{\sphericalangle AGB} + \overline{\sphericalangle BGC} = 180^\circ$ usw.
Hier liegt ein Zirkelschluß vor, da an den hervorgehobenen Stellen schon benutzt wird, daß F, G, C sowie G, C, E kollinear sind.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

211021

Beziehungen (1) bis (4)	2 Punkte
Beziehung (5) mit Begründung	2 Punkte
Daraus Ermittlung $p = \frac{4}{5}c$ und $p = \frac{1}{5}c$	2 Punkte
Angabe des Verhältnisses $q:p = 1:4$	2 Punkte
	8 Punkte

211022

a) Nachweis, daß nicht alle Angaben wahr sein können	2 Punkte
b) Beispiel mit Probe	2 Punkte
c) Beispiel mit Probe	2 Punkte
d) Beispiel mit Probe	2 Punkte
e) Beispiel mit Probe	2 Punkte
	10 Punkte

211023

Anwendung der binomischen Formel	2 Punkte
Primfaktorenzerlegung von 1981	2 Punkte
Angabe der acht Paare $(x+y;\ x-y)$	3 Punkte
Angabe der acht Paare $(x;y)$ mit Probe	3 Punkte
	10 Punkte

211024

Planfigur	1 Punkt
C liegt auf EF (mit Begründung)	3 Punkte
G liegt auf EF (mit Begründung)	8 Punkte
	12 Punkte