A 9;I XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>210931</u>

Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A: (1) x ist eine zweistellige Zahl.
(2) x ist kleiner als 1000.

Paar B: (1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C: (1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
(2) x ist durch 37 teilbar.

Paar D: (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A,B,C,D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist! Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

<u>210932</u>

Ist ABCD ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = \overline{AD} = 6$ cm und $a = \overline{AB} > b$ gilt, so seien E,G diejenigen Punkte auf CD und F,H diejenigen Punkte auf AB, für die AFED und HBCG Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, daß es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

A 9;I

210933

Beweisen Sie, daß die Ungleichung

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

gilt!

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

210934

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50^\circ$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm! Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle$ BAC, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, A'B'C' auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

210935

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

210936

Bei einem Tetraeder ABCD seien die Kantenlängen

$\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AD} = 13$ cm, $\overline{BD} = 13$ cm gegeben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, daß durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>210931) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Angenommen, eine natürliche Zahl x habe die verlangten Eigenschaften. Dann folgt:

Wäre A(1) wahr und A(2(falsch, so ergäbe sich der Widerspruch, daß die zweistellige Zahl x nicht kleiner als 1000 wäre. Daher ist A(1) falsch und A(2) wahr, also x ein- oder dreistellig.

Wäre C(1) wahr und C(2) falsch, so ergäbe sich der Widerspruch, daß x durch $111=3\cdot 37$, aber nicht durch 37 teilbar wäre. Also ist C(1) falsch und C(2) wahr. Somit ist x durch 37 teilbar, wegen $x\neq 0$ also mindestens zweistellig. Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß x dreistellig ist. Wäre D(1) wahr, so wären alle drei Ziffern von x die Ziffer 9 im Widerspruch dazu, daß C(1) falsch ist. Folglich ist D(1) falsch und D(2) wahr. Daher ist eine Ziffer von x eine 0. Wie die folgende Tabelle aller nicht mit drei gleichen Ziffern geschriebenen dreistelligen Vielfachen von 37 zeigt, ist dies nur für 370, 407, 703 und 740 der Fall.

n	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25	26
$n\cdot 37$	148	185	259	296	370	407	481	518	592	629	703	740	814	851	925	962

(Man erhält diese Tabelle z. B. leicht, indem man zu 148 und zu 185 jeweils fortlaufend 111 addiert.)

Für x=407 sind B(1) und B(2) wahr; für x=370 sind B(1) und B(2) falsch. Diese beiden Zahlen haben somit nicht die verlangten Eigenschaften. Also können nur x=703 und x=740 die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn für sie sind A(2), C(2), D(2) wahr und A(1), C(1), D(1) falsch; für x=703 ist B(1) wahr und B(2) falsch; für x=740 ist B(1) falsch und B(2) wahr. Somit haben genau 703 und 740 die geforderten Eigenschaften.

210932) Lösung: 7 Punkte

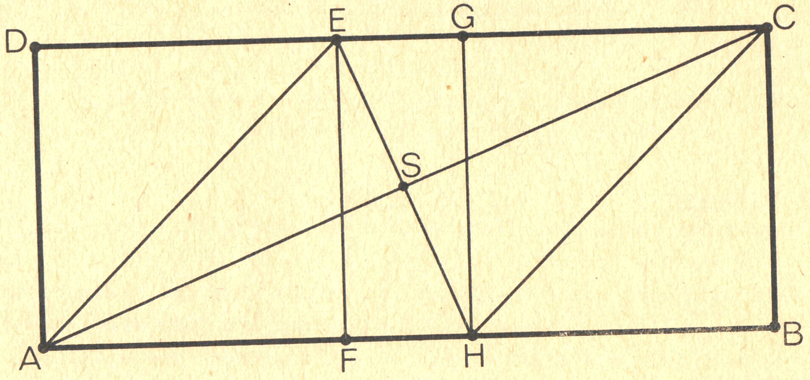

Abb. L 210932

Bei den vorausgesetzten Bezeichnungen gilt $\overline{AE} = \overline{AD}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm und $EC \parallel AH$ sowie $\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = \overline{AB} - \overline{HB} = \overline{AH}$. Also ist AHCE ein Parallelogramm. In ihm stehen die Diagonalen EH und AC genau dann aufeinander senkrecht, wenn AHCE ein Rhombus ist, d. h. genau für $\overline{AH} = \overline{AE}$. Dies trifft genau dann zu, wenn $a = \overline{AB} = \overline{HB} + \overline{AH}$ den Wert

$$a = 6(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

hat.

Hinweise:

(1) Zum Nachweis von $\overline{EC} = \overline{AH}$ ist der Beweisweg $\overline{EC} = \overline{EG} + \overline{GC}$ usw. erst dann gangbar, wenn zuvor gezeigt wurde, daß $EH \perp AC$ nur möglich ist, falls G zwischen E und C liegt. Dies erhält man z. B. so: Wenn das Dreieck ESC (mit S als Schnittpunkt von EH und AC) bei S rechtwinklig ist, so gilt $\overline{\sphericalangle CES} < 90^\circ$, also hat das Dreieck EHC bei E und C spitze Winkel.

(2) Der Satz über die Diagonalen im Rhombus ist entweder als bekannter Sachverhalt zu zitieren (und zwar als logische Äquivalenz!) oder z. B. wie folgt zu beweisen: Im Parallelogramm AHCE halbiert der Diagonalenschnittpunkt S die Diagonale EH. Aus $EH \perp AC$ folgt daher $\triangle ASH \cong \triangle ASE$ nach (sws) und daraus $\overline{AH} = \overline{AE}$. Für den umgekehrten Schluß folgt aus $\overline{AH} = \overline{AE}$ nach (sss) zunächst $\triangle ASH \cong \triangle ASE$ und daraus $\overline{\sphericalangle ASH} = \overline{\sphericalangle ASE} = 90^\circ$.

:) Die Parallelogrammeigenschaft von AHCE (bzw. die daraus erhaltene in (2) verwendete Halbierungsaussage $\overline{ES} = \overline{SH}$) kann statt mit $\overline{EC} = \overline{AH}$ auch so bewiesen werden: Wegen DE $\parallel$ HB, $\overline{DE} = \overline{HB}$ ist HBED ein Parallelogramm. In ihm halbieren sich die Diagonalen EH und BD. Im Rechteck ABCD halbieren sich BD und AC. Also halbieren sich EH und AC.

<u>210933) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Man beweist zunächst

$$2^2 < 1000^1, \ldots, 500^{500} < 1000^{499}, \qquad (1)$$

z. B. folgendermaßen:

Für k = 2, ..., 9 ist 2k > 3, also k < 3(k-1) und daher

$$k^k < 10^k < 10^{3(k-1)} = 1000^{k-1},$$

für k = 10, ..., 500 ist $2^k > 1000$ und daher

$$k^k \leqq 500^k = \frac{1000^k}{2^k} < 1000^{k-1}.$$

Aus (1) folgt dann: Es gilt

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 500^{500} \cdot 501^{501} \cdot \ldots \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000}$$
$$< 1 \cdot 1000^1 \cdot \ldots \cdot 1000^{499} \cdot 1000^{501} \cdot \ldots \cdot 1000^{999} \cdot 1000^{1000}$$
$$= 1000^{(1+999) + \ldots + (499+501) + 1000}$$
$$= 1000^{500000}, \text{ w.z.b.w.}$$

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Mit der Abschätzung k^k ($\leqq$) 1000^k für alle k = 1,...,999,(1000) erhält man nur die zu große obere Schranke 1000^{500500}. Diese Abschätzung kann daher, wenn sie in einem Lösungsversuch auftritt, nur im Sinne eines die Beweisforderung verdeutlichenden Orientierungsschrittes gewertet werden, dem wesentlich zu einer Lösung beitragende Elemente fehlen.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

210934) Lösung: **7 Punkte**

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks sei M. Dann haben im Dreieck BMC die Seiten BM und CM die Länge r, und der eingeschlossene Winkel hat nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel die Größe $\overline{\angle BMC} = 2\alpha$. Ferner[1] liegt A wegen $\alpha < 90^\circ$ mit M auf derselben Seite der Geraden durch B,C. Weiterhin gilt $\overline{MA} = r$, und A hat von der Geraden durch B,C den Abstand h_a.

II. Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck BMC mit $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ und $\overline{\angle MBC} = 2\alpha$.

(2) Man konstruiert den Kreis k um M mit dem Radius r.

(3) Man konstruiert die Parallele p mit dem Abstand h_a zur Geraden durch B,C auf derselben Seite[1] wie M.

(4) Einen Schnittpunkt von p mit k bezeichnet man mit A.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktionsschritt (1), (2) und (4) gilt $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MA} = r$, also ist r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Nach (1), (3), (4) und dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel gilt $\overline{\angle BAC} = \alpha$. Nach (3) und (4) hat A von der Geraden durch B,C den Abstand h_a; damit hat die auf BC senkrechte Höhe des Dreiecks ABC die Länge h_a, wie es verlangt war.

---

1 Diese Ausführungen können wegbleiben, wenn festgestellt wird, daß bei den gegebenen Werten von α , r und h_a die Parallele p' mit dem Abstand h_a zur Geraden durch B,C auf der anderen Seite als M keinen Punkt mit k gemeinsam hat. Dafür muß dann in III. zum Nachweis von $\overline{\angle BAC} = \alpha$ die (nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel zunächst ebenfalls vorhandene) Möglichkeit $\overline{\angle BAC} = 180^\circ - \alpha$ durch die genannte Feststellung (daß k die Parallele p' nicht schneidet) ausgeschlossen werden.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar. Für die gegebenen Werte von α, r und h_a schneiden sich k und p in genau zwei Punkten[1] A_1 und A_2, die beide in (4) als A gewählt werden können. Bei der Spiegelung an der Mittelsenkrechten von BC werden B und C miteinander vertauscht, M, k und p gehen in sich über, daher werden A_1 und A_2 miteinander vertauscht. Also kommen die Dreiecke A_1BC und A_2CB dabei miteinander zur Deckung (mit der genannten Reihenfolge der Eckpunkte).

Daher ist ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

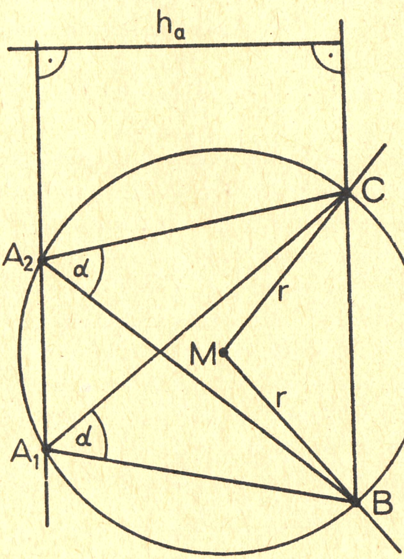

Abb. L 210934

1 Dies kann durch Verweis auf die ausgeführte Konstruktion belegt werden.

210935) Lösung: 6 Punkte

Es sei s die Summe zweier Quadratzahlen, also $s = a^2 + b^2$ mit ganzen Zahlen a,b.

I. Wenn a^2 und b^2 durch 11 teilbar sind, so folgt:
Es gibt ganze Zahlen m und n mit $a^2 = 11m$ und $b^2 = 11n$, also $s = 11(m+n)$. Daher ist s durch 11 teilbar.

II. Wenn s durch 11 teilbar ist, so folgt:
Es gibt eine ganze Zahl r mit $s = 11r$.
Ferner gibt es ganze Zahlen p,q,u,v mit

$$a = 11p + u, \; b = 11q + v, \tag{1}$$

$$0 \leqq u \leqq 10, \quad 0 \leqq v \leqq 10, \tag{2}$$

also $11r = s = 11^2p^2 + 2\cdot 11pu + u^2 + 11^2q^2 + 2\cdot 11qv + v^2$. Daher ist $u^2 + v^2 = 11(r - 11p^2 - 2pu - 11q^2 - 2qv)$ durch 11 teilbar.
Wie die folgende Tabelle der u^2+v^2 zu allen u,v mit (2) zeigt,

u \ v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1		2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2			8	13	20	29	40	53	68	85	104
3				18	25	34	45	58	73	90	109
4					32	41	52	65	80	97	116
5						50	61	74	89	106	125
6							72	85	100	117	136
7								98	113	130	149
8									128	145	164
9										162	181
10											200

ist u^2+v^2 nur im Fall $u = v = 0$ durch 11 teilbar. Nach (1) folgt hieraus, daß $a^2 = 11^2p^2$ und $b^2 = 11^2q^2$ durch 11 teilbar sind.

Hinweise: Wegen $u^2+v^2 = v^2+u^2$ brauchen nur die in der Tabelle aufgeführten Werte herangezogen zu werden. (Sie lassen sich leicht z. B. durch Addition von 1,3,...,19 jeweils zur vorangehenden Zeile finden.)

Weitere Rechenschritte lassen sich einsparen, indem man $-5 \leqq u,v \leqq 5$ statt (2) ansetzt und $(-u)^2 + (-v)^2 = u^2 + v^2$ ausnutzt.
Ferner läßt sich die Darstellung durch Verwendung der Kongruenzschreibweise sowie durch Zusammenfassung des Hin- und Rückschlusses I,II zu einer Aufeinanderfolge äquivalenter Aussagen vereinfachen.
Die in der Tabelle wiedergegebene Diskussion bleibt auch bei derartigen Darstellungsvarianten als Kerngedanke des Beweises erforderlich.

210936) Lösung: 7 Punkte

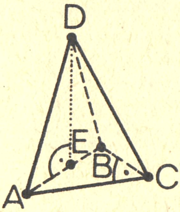

Abb. L 210936

Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ ist das Dreieck ABD gleichschenklig, und E, der Fußpunkt des Lotes von D auf AB, ist der Mittelpunkt von AB. Es gilt mithin $\overline{AE} = \overline{BE} = 5$ cm.
Nach dem Satz des Pythagoras ist folglich

$$\overline{DE} = \sqrt{13^2 - 5^2}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}. \qquad (1)$$

Wäre der Fußpunkt F des Lotes von D auf die Fläche des Dreiecks ABC von E verschieden, so würde für das rechtwinklige Dreieck DEF mit dem rechten Winkel bei F

$$\overline{DE} > \overline{DF}$$ gelten.

Da jedoch nach (1) und Voraussetzung $\overline{DE} = \overline{DF}$ gilt, fällt F mit E zusammen.
Da 6,8 und 10 ein pythagoreisches Zahlentripel bilden, ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, und E ist der Mittelpunkt der Hypotenuse. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales folgt somit $\overline{EC} = 5$ cm, und da das Dreieck CDE bei E einen rechten Winkel besitzt, folgt

$$\overline{CD} = \sqrt{12^2 + 5^2}\ \text{cm} = 13\ \text{cm}.$$

Damit ist der geforderte Beweis geführt und die gesuchte Kantenlänge $\overline{CD} = 13$ cm ermittelt.