XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

210921

In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen:
Ermitteln Sie alle Tripel $(a;b;c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

210922

Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.
Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist!

210923

Beweisen Sie, daß reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &> 0, \\ x \cdot y \cdot z &> 0, \\ xy + xz + yz &> 0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

210924

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, daß sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $\overline{ED} = \overline{DB} + \cancel{\overline{BC}}$ EC gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es (zu gegebenem Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Kuhlau?

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

210921) Lösung: **10 Punkte**

Angenommen, ein Tripel (a;b;c) natürlicher Zahlen genügt den Anforderungen. Dann folgt:
Da insgesamt genau fünf Ziffern verwendet werden, kann a nicht einstellig sein; denn sonst müßten b und c als Teiler von a ebenfalls einstellig sein. Die Zahl a kann aber auch nicht dreistellig sein, da dann sowohl b als auch c einstellig wären, ihr Produkt a also nicht dreistellig wäre.
Also muß a zweistellig sein, und von den beiden anderen Zahlen ist eine einstellig und die andere zweistellig. Ihre Reihenfolge sei zunächst so gewählt, daß b zweistellig und c einstellig ist. Aus $a \neq b$ folgt $c \neq 1$. Es gilt aber auch $c \neq 5$, da sonst die Zahl a auf 5 oder auf 0 enden müßte, im Widerspruch dazu, daß a und c nicht auf dieselbe Ziffer enden sollen bzw. die Ziffer 0 nicht vorkommen darf. Aus analogen Gründen kann auch die Zahl b nicht auf 5 enden. Daher endet auch das Produkt a von b und c nicht auf 5. Ferner hat b auch nicht 5 als Zehnerziffer, da dann für a nur noch eine Zehnerziffer $\leqq 4$ verbliebe, im Widerspruch zu $a > b$. Somit muß 5 als erste Ziffer von a auftreten; d.h., a kann nur eine der Zahlen 51,52,53,54 sein. Von ihnen scheidet 53 als Primzahl aus. Für die Zerlegung der verbleibenden Zahlen in jeweils einen zweistelligen Faktor b und einen einstelligen Faktor $c \neq 1$ gibt es genau folgende Möglichkeiten:

I. $51 = 17 \cdot 3$, $52 = 26 \cdot 2$, $52 = 13 \cdot 4$, $54 = 27 \cdot 2$, $54 = 18 \cdot 3$.
Von diesen scheiden alle außer $52 = 13 \cdot 4$ aus, da sie nicht die vorgeschriebenen Ziffern enthalten. Also können, wenn noch die ebenfalls mögliche umgekehrte Reihenfolge von b und c berücksichtigt wird, nur die Tripel (52;13;4) und (52;4;13) den Anforderungen der Aufgabe genügen.

II. Sie genügen diesen Anforderungen; denn sie enthalten die vorgeschriebenen Ziffern, und es gilt $52:13 = 4$ sowie $52:4 = 13$. Daher sind genau die Tripel (52;13;4) und (52;4;13) die gesuchten.

210922) Lösung: 8 Punkte

Der gegebene Quader sei ABCDA'B'C'D' mit $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{AA'} = a$.

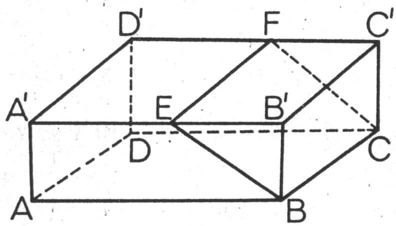

Abb. L 210922

In der Ebene des Rechtecks ABB'A' zeichne man den Kreis um B mit dem Radius b. Er schneidet wegen $\overline{BB'} < b < \overline{A'B'}$ die Strecke A'B' in einem inneren Punkt, der E genannt sei. Die Parallele zu B'C' durch E schneidet D'C' in einem Punkt, der F genannt sei. Dann gilt $\overline{EF} = \overline{BC} = b$ und wegen der Kongruenz der Dreiecke EB'B und FC'C (nach s,w,s) auch $\overline{FC} = \overline{EB} = b$. Folglich bilden B,E,F und C die Ecken eines Rhombus. Da BC auf der Ebene ABB'A' nach Voraussetzung senkrecht steht, steht BC auf jeder Geraden dieser Ebene durch B senkrecht und damit auch auf EB. EBCF ist also sogar ein Quadrat. Damit ist gezeigt, daß es einen ebenen Schnitt durch den Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist.

210923) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn x,y und z positive reelle Zahlen sind, dann gelten die genannten Ungleichungen

$$x + y + z > 0, \qquad (1)$$

$$xyz > 0, \qquad (2)$$

$$xy + xz + yz > 0, \qquad (3)$$

da Summe und Produkt von positiven Zahlen stets wieder positive Zahlen ergeben.

II. Wenn x,y und z die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllen, dann folgt:

Wäre $x \leqq 0$, so ergäbe sich aus (1) und (3)

$x(x+y+z) \leqq 0 < xy + xz + yz,$

also $x^2 < yz$ und daher wegen $x^2 \geqq 0$ erst recht $yz > 0$. Hieraus und aus $x \leqq 0$ folgte $xyz \leqq 0$ im Widerspruch zu (2). Somit ist die Annahme $x \leqq 0$ widerlegt, d.h. $x > 0$ bewiesen. Entsprechend erhält man die Schlußfolgerungen $y > 0$ und $z > 0$, w.z.b.w.

<u>210924) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

I. Angenommen, eine Parallele zu BC hat die verlangte Eigenschaft. Wegen $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BC}$ gibt es einen Punkt P auf ED mit $\overline{PD} = \overline{DB}$ und $\overline{PE} = \overline{EC}$.
Für diesen gilt
$\overline{\sphericalangle DBP} = \overline{\sphericalangle DPB}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BPD)
$= \overline{\sphericalangle PBC}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen);
d.h., P liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$. Ebenso erhält man, daß P auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ liegt.

II. Daraus folgt, daß eine Gerade g nur dann eine Parallele zu BC mit der verlangten Eigenschaft ist, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die von $\sphericalangle ACB$. Sie schneiden sich[1] in einem Punkt, der P genannt sei.
(2) Man zeichnet die Parallele g zu BC durch P.

III. Wenn eine Gerade g durch diese Konstruktion erhalten wird, so genügt sie den Bedingungen der Aufgabe.
<u>Beweis:</u> Es gilt:
$\overline{\sphericalangle EPC} = \overline{\sphericalangle BCP}$ sowie $\overline{\sphericalangle DPB} = \overline{\sphericalangle PBC}$
als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Ferner gilt laut Konstruktion
$\overline{\sphericalangle BCP} = \overline{\sphericalangle PCE}$ sowie $\overline{\sphericalangle PBC} = \overline{\sphericalangle PBD}$.
Also gilt
$\overline{\sphericalangle EPC} = \overline{\sphericalangle PCE}$ sowie $\overline{\sphericalangle DPB} = \overline{\sphericalangle PBD}$, d.h. die Dreiecke EPC und BPD sind gleichschenklig mit $\overline{EP} = \overline{EC}$ bzw. $\overline{PD} = \overline{DB}$
Folglich gilt
$\overline{ED} = \overline{EP} + \overline{PD} = \overline{EC} + \overline{DB}$, w.z.b.w.

---

1 Ein Beweis wird vom Schüler nicht verlangt.

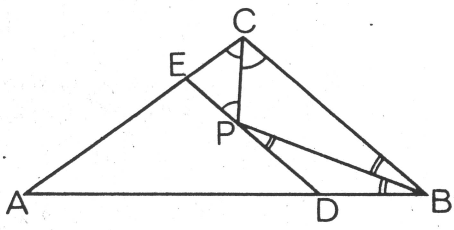

Abb. L 210924

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau eine Parallele der verlangten Art.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

210921	
a ist zweistellig	1 Punkt
$c \neq 1$	1 Punkt
$c \neq 5$	1 Punkt
b endet nicht auf 5	1 Punkt
5 tritt als erste Ziffer von a auf	2 Punkte
b ist eine der Zahlen 51; 52; 54	1 Punkt
Ausschluß von 51 und 54	1 Punkt
(alle diese Aussagen jeweils mit Begründung)	
Angabe der Tripel	1 Punkt
Kontrolle	1 Punkt
	10 Punkte
210922	
Skizze, Lage der Schnittfläche, Punkte E und F	1 Punkt
$\overline{EF} = \overline{BC} = b$ (mit Begründung)	1 Punkt
$\overline{FC} = \overline{EB} = b$ (mit Begründung)	2 Punkte
BEFC ist ein Rhombus	1 Punkt
BC steht senkrecht auf EB (mit Begründung)	2 Punkte
Schlußfolgerung	1 Punkt
	8 Punkte
210923	
I. Für alle positiven Zahlen sind die Ungleichungen erfüllt	3 Punkte
II. Annahme $x \leqq 0$ (bzw. $y \leqq 0$ oder $z \leqq 0$)	1 Punkt
Darlegung des Widerspruchs	5 Punkte
Analoge Betrachtung für die beiden anderen Größen	1 Punkt
	10 Punkte
210924	
Erkennen des Punktes P	1 Punkt
P liegt auf den Winkelhalbierenden (mit Begründung)	4 Punkte
Konstruktion mit Beschreibung	3 Punkte
Nachweis der Richtigkeit der Konstruktion	3 Punkte
Nachweis der Eindeutigkeit der Konstruktion	1 Punkt
	12 Punkte