A 8;I

XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

210831

In dem Schema

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{A}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{C} & - & \boxed{D}\boxed{C}\boxed{E} & = & \boxed{F}\boxed{B}\boxed{E}\boxed{G} \\ : & & + & & - \\ \boxed{C}\boxed{D} & \cdot & \boxed{H}\boxed{E} & = & \boxed{J}\boxed{D}\boxed{A}\boxed{F} \\ \hline \boxed{J}\boxed{F}\boxed{K} & + & \boxed{D}\boxed{D}\boxed{A} & = & \boxed{J}\boxed{J}\boxed{F}\boxed{C} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0,1,2,...,9) ersetzt werden, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.
Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

210832

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!

A 8;I

210833

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5,5 cm gezeichnet.
Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck A'B'C' konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.
Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks A'B'C' und beweise, daß es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!
Hinweis: Eine "Analyse" (Schlußfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck A'B'C' habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine "Determination" (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

210834

Von einem Trapez ABCD mit AB ∥ CD, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ gilt.
Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapzes ABCD eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

210835

Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.
Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

210836

Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:
Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

210831) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine Ersetzung die gestellten Forderungen erfüllt, so folgt: Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen stets kleiner als 2000 ist, folgt aus der dritten Zeile

$J = 1.$ (1)

Ferner folgt: Wäre $D \leqq 8$, so wäre $\boxed{JFK} + \boxed{DDA} < 200 + 900$ im Widerspruch zu $\boxed{JJFC} \geqq 1100$. Also ist

$D = 9.$ (2)

Demnach ist $B < 9$; folglich muß in der dritten Spalte die Anfangsziffer F des Minuenden sowohl um die Anfangsziffer $J = 1$ des Subtrahenden als auch um einen Übertrag 1 vermindert werden, um die Anfangsziffer $J = 1$ der Differenz zu erhalten. Daraus folgt

$F = 3.$ (3)

Aus Zeile 1 folgt, daß die Anfangsziffer A des vierstelligen Minuenden nur deshalb von der Anfangsziffer $F = 3$ der vierstelligen Differenz verschieden sein kann, weil sie um den Übertrag 1 vermindert wurde; denn der Subtrahend in dieser Zeile ist nur dreistellig. Also ist

$A = 4.$ (4)

Aus der zweiten Zeile und der Primfaktorzerlegung $1943 = 29 \cdot 67$ folgt unter Berücksichtigung von (2)

$C = 2,\ H = 6,\ E = 7.$ (5)

Damit ergibt die dritte Zeile

$K = 8$ (6)

und die dritte Spalte

$B = 0,\ G = 5.$ (7)

Folglich kann nur die in (1) bis (7) genannte Ersetzung die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die Buchstaben werden dabei so durch Ziffern ersetzt, daß gleiche Buchstaben durch gleiche

Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben des Schemas

$$\begin{array}{ccccc} 4002 & - & 927 & = & 3075 \\ : & & + & & - \\ 29 & \cdot & 67 & = & 1943 \\ \hline 138 & + & 994 & = & 1132 \end{array}$$

richtig gerechnet sind, insbesondere 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftritt.
Also erfüllt genau die Ersetzung (1) bis (7) alle Forderungen der Aufgabe.

Hinweis: Es gibt zahlreiche andere Lösungswege, insbesondere Möglichkeiten des systematischen Probierens. Man kann auch vorteilhaft von der Schreibweise $x \equiv y$ modulo 10 Gebrauch machen. Stets ist darauf zu achten, daß nicht nur die Lösung angegeben wird, sondern außerdem der Nachweis geführt wird, daß es nur eine Lösung gibt.

210832) Lösung: 6 Punkte

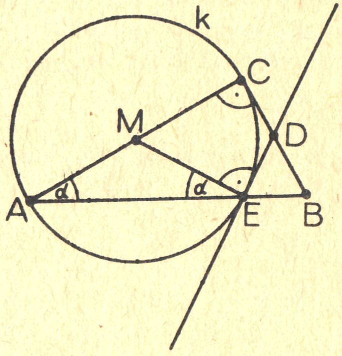


Abb. L 210832

Die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$ sei mit α bezeichnet.
Das Dreieck AEM ist wegen $\overline{AM} = \overline{EM}$ gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle AEM = \alpha$. Der Winkel $\sphericalangle MED$ ist ein rechter Winkel, da die Tangente stets senkrecht auf dem Berührungsradius steht.
Mithin ist
$\sphericalangle DEB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$.
Im Dreieck ABC ist wegen des Winkelsummensatzes $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$.
Da also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEB$ ist, und beide Winkel Innenwinkel des Dreiecks EBD sind, ist dieses gleichschenklig, w.z.b.w.

2. Lösungsweg: Aus $\overline{ME} = \overline{MC}$ und $\overline{\sphericalangle MCD} = \overline{\sphericalangle MED} = 90^\circ$ folgt: MECD ist ein Drachenviereck, also gilt $\overline{ED} = \overline{DC}$ sowie $CE \perp MD$. Da nach dem Satz von Thales, angewandt auf das Dreieck AEC, auch $CE \perp AE$ gilt, folgt $MD \parallel AB$. Hieraus und aus $\overline{AM} = \overline{MC}$ erhält man nach dem Strahlensatz $\overline{BD} = \overline{DC}$.
Damit ist $\overline{ED} = \overline{BD}$ gezeigt.

210833) Lösung: 7 Punkte

I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.

(2) Man wendet auf A, B und C die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_1}$ an. Die erhaltenen Bildpunkte von A, B, C seien A", B" bzw. C".

(3) Man verlängert $M_1A"$, $M_1B"$, $M_1C"$ jeweils über A", B" bzw. C" hinaus bis zum Schnitt mit k_1. Die Schnittpunkte seien A', B' bzw. C'.

II. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck A'B'C' die geforderten Eigenschaften hat:

Nach Konstruktionsschritt (3) liegen A', B' und C' auf k_1, also gilt:

$$\overline{M_1A'} = \overline{M_1B'} = \overline{M_1C'}. \qquad (*)$$

Ferner ist der in (1) konstruierte Punkt M Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC. Geht k bei der in (2) durchgeführten Verschiebung in k" über, so ist folglich M_1 der Mittelpunkt von k" und k" der Umkreis des Dreiecks A"B"C". Hiernach gilt

$$\overline{M_1A"} = \overline{M_1B"} = \overline{M_1C"}. \qquad (**)$$

Wegen (3), (*) und (**) gehen A", B", C" aus A',B',C' durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M_1 hervor. Also entsteht das Dreieck A'B'C' aus dem Dreieck ABC dadurch, daß erst eine Verschiebung und dann eine Streckung ausgeführt wird; somit sind die Dreiecke A'B'C' und ABC einander ähnlich.

2. Lösungsweg:

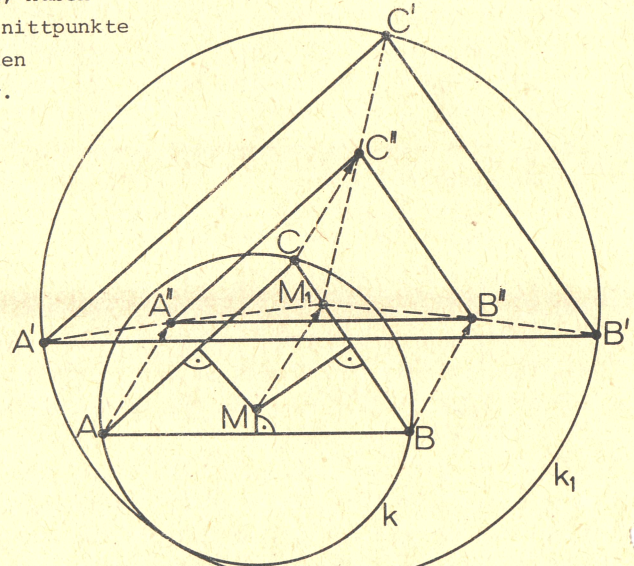
I. (1) Man wählt einen beliebigen Punkt A' auf k_1.

(2) An M_1A' trägt man in M_1 nach einer Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \overline{\sphericalangle ACB}$ und nach der anderen Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \overline{\sphericalangle ABC}$ an. Der freie Schenkel des erstgenannten

Winkels schneide k_1 in B', der freie Schenkel des anderen Winkels schneide k_1 in C'.

II. Nach (1) und (2) liegen A',B',C' auf k_1. Nach dem Peripheriewinkelsatz und (2) ist ferner $\overline{\sphericalangle A'C'B'} = \frac{1}{2}\ \overline{\sphericalangle A'M_1B'} = \overline{\sphericalangle ACB}$ sowie $\overline{\sphericalangle A'B'C'} = \frac{1}{2}\ \overline{\sphericalangle A'M_1C'} = \overline{\sphericalangle ABC}$. Daher sind die Dreiecke A'B'C' und ABC ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz.

<u>Hinweis</u> zur Zeichengenauigkeit: In demjenigen Koordinatensystem, in dem A und B die Koordinaten (0;0) bzw. (6;0) haben und C eine positive Ordinate hat, haben k und k_1 zwei Schnittpunkte mit den Koordinaten (1,26; -2,09) bzw. (1,55; - 2,27).



XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

210834) Lösung: 6 Punkte

Es sei ABCD ein Trapez mit $AB \parallel CD$; sein Diagonalenschnittpunkt sei S. Der Abstand zwischen den Parallelen AB und CD betrage h, der Abstand des Punktes S von CD sei x. Dann ist h-x sein Abstand von AB.

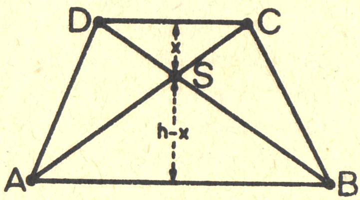


Abb. L 210834

Nach dem Strahlensatz gilt

$$x : (h-x) = \overline{SC} : \overline{SA} = \overline{CD} : \overline{AB} = 1 : 2,$$

also $2x = h - x$,

$3x = h$ und mithin

$x = \frac{1}{3}h$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS beträgt

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot(h-x) = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}h = \frac{1}{3}\overline{AB}\cdot h;$$

der Flächeninhalt des Trapezes ABCD beträgt

$$\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\overline{AB}\cdot h = \frac{3}{4}\overline{AB}\cdot h.$$

Daher ist das gesuchte Verhältnis eindeutig bestimmt; es beträgt

$$\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = 4 : 9.$$

210835) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, es wurden x Zwanzigmarkscheine und y Fünfzigmarkscheine ausgezahlt. Dann wurden (x-1) Zehnmarkscheine ausgezahlt, und es gilt:

$$(x - 1) + x + y = 29, \text{ also}$$
$$2x + y = 30 \text{ sowie}$$
$$2x < y < 3x.$$

Aus $2x + y = 30$ und $2x < y$ folgt $4x < 30$, also $x \leq 7$. (1)

Aus $2x + y = 30$ und $3x > y$ folgt $5x > 30$, also $x > 6$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $x = 7$, also $y = 30 - 14 = 16$.

Somit wurden 6 Zehnmarkscheine, 7 Zwanzigmarkscheine und 16 Fünfzigmarkscheine, also ein Betrag von 1000 M, ausgezahlt.

210836) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine sechsstellige natürliche Zahl z die geforderte Eigenschaft hat, so folgt: Ist x die erste Ziffer von z, so ist

$$z = 100000x + y$$

mit einer natürlichen Zahl y, für die

$$y < 100000$$

gilt, sowie

$$z' = 10y + x,$$

und es gilt

$$(100000x + y)\cdot 3 = 10y + x,$$

also

$$\begin{aligned} 300000x + 3y &= 10y + x, \\ 299999x &= 7y, \\ 42857x &= y. \end{aligned}$$

Wäre $x \geqq 3$, so wäre $y \geqq 42857\cdot 3$ im Widerspruch zu $y < 100000$. Daher (und weil x als erste Ziffer einer mehrstelligen Zahl größer als 0 ist) kann nur

entweder $x = 1$, $y = 42857$

oder $x = 2$, $y = 42857\cdot 2 = 85714$

sein.

Also können höchstens die Zahlen

$z = 142857$

und $z = 285714$

die geforderte Eigenschaft haben.

II. Sie haben diese Eigenschaft; denn es gilt

$3\cdot 142857 = 428571$

und $3\cdot 285714 = 857142$.

Daher haben genau diese beiden sechsstelligen natürlichen Zahlen die geforderte Eigenschaft.