XXI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

**Achtung:** Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

210821

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$$

gilt!

210822

Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates ABCD. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat ABCD eine blattartige Figur (in der Abb. A 210822 schraffiert) einschließen.

a) Berechne für a = 3,5 cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!

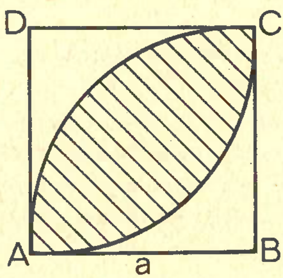


Abb. A 210822

210823

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt:

Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

210824

Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.

Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.

Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.

Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.

Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.

Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.

Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.

Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so daß alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

**Lösungen und Punktbewertung**

Olympiadeklasse 8

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

**210821) Lösung:** **8 Punkte**

I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \qquad (1)$$

und

$$\frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}. \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $a+12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich

$$4 < a. \qquad (3)$$

Aus (2) folgt $3a < a+12$, also $2a < 12$, folglich

$$a < 6. \qquad (4)$$

Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Ungleichung; denn es gilt

$\frac{1}{4} < \frac{5}{17}$, da $\frac{1}{4} = \frac{17}{68}$ und $\frac{5}{17} = \frac{20}{68}$ ist, sowie

$\frac{5}{17} < \frac{1}{3}$, da $\frac{5}{17} = \frac{15}{51}$ und $\frac{1}{3} = \frac{17}{51}$ ist.

Daher erfüllt genau $a = 5$ die Bedingungen der Aufgabe.

**2. Lösungsweg:** Bildet man $\frac{a}{a+12}$ für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $a = n$ und $a = n+1$, so erhält man die Zahlen $\frac{n}{n+12}$ und $\frac{n+1}{n+13}$. Bringt man sie auf den gemeinsamen Nenner $(n+12)(n+13)$, so lauten sie $\frac{n(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13n}{(n+12)(n+13)}$ bzw. $\frac{(n+1)(n+12)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13n+12}{(n+12)(n+13)}$. Daher gilt stets $\frac{n}{n+12} < \frac{n+1}{n+13}$, d.h. die für $a = 0, 1, 2, \ldots$ gebildeten Zahlen erfüllen die Ungleichungen

$$0 < \frac{1}{13} < \frac{2}{14} < \frac{3}{15} < \frac{4}{16} < \frac{5}{17} < \frac{6}{18} < \frac{7}{19} < \ldots .$$

Wegen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ erfüllt somit genau die natürliche Zahl a = 5 die geforderte Ungleichung.

<u>210822) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert. Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d.h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3{,}5^2 - \frac{1}{2}\cdot 3{,}5^2\right)\ \mathrm{cm}^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot 3{,}5^2\ \mathrm{cm}^2 =$$
$$= 0{,}57\cdot 12{,}25\ \mathrm{cm}^2 \approx 6{,}98\ \mathrm{cm}^2.$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel $2\cdot\left(\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$.

<u>Hinweise:</u>

1) Man kann natürlich auch den Aufgabenteil b) zuerst lösen und dann durch Einsetzen von a = 3,5 cm das Ergebnis a) ermitteln.

2) Andere Lösungsmöglichkeiten: Von dem Flächeninhalt des Viertelkreises um B subtrahiert man den Flächeninhalt desjenigen Flächenstückes, das von den Strecken AB, BC und dem Viertelkreisbogen um D begrenzt wird. Diesen letztgenannten Flächeninhalt erhält man als Differenz aus dem Flächeninhalt des Quadrates und dem Flächeninhalt des Viertelkreises um D. Dieser Lösungsweg kann auch so dargestellt werden, daß man durch Addition der Flächeninhalte der beiden Viertelkreise "den Flächeninhalt des Quadrates mit doppelter Berücksichtigung des schraffierten Flächenstückes", d.h. die Summe aus dem Flächeninhalt des Quadrates und dem des schraffierten Flächenstückes erhält.

3) Der bei der Verwendung des Näherungswertes $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$ auftretende Rundungsfehler wirkt sich wegen der Multiplikation mit 12,25 bereits so stark aus, daß der Wert 6,98 cm² nicht auf 2 Dezimalen genau ist. Einen mit vorgeschriebener Genauigkeit gerundeten Wert anzugeben, wird vom Schüler nicht verlangt. Sogar eine Lösungsangabe wie etwa $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot 12{,}25\ \mathrm{cm}^2$ ist zu akzeptieren, da über Modalitäten der Lösungsangabe keine For-

derung im Aufgabentext vorliegt. Von 6,98 $cm^2$ abweichende Wertangaben sind daher beim Korrigieren daraufhin zu prüfen, ob sie durch Verwendung anderer (aber ebenfalls richtig gerundeter) Näherungswerte für $\pi$ gerechtfertigt sind.

210823) Lösung: 10 Punkte

a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel $60^\circ$, jeder Außenwinkel also $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin $240^\circ$, die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt $120^\circ$. Da $240^\circ$ das Doppelte von $120^\circ$ ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A,B,C gehörenden Innenwinkelgrößen seien $\alpha$, $\beta$ bzw. $\gamma$; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$ bzw. $180^\circ - \gamma$. In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, daß die drei Gleichungen

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 2\cdot(\alpha + \beta), \tag{1}$$
$$(180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 2\cdot(\beta + \gamma), \tag{2}$$
$$(180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \alpha) = 2\cdot(\gamma + \alpha) \tag{3}$$

gelten. Aus (1) folgt $360^\circ - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360^\circ$ und daher

$$\alpha + \beta = 120^\circ. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt ebenso

$$\beta + \gamma = 120^\circ \tag{5}$$

bzw. $$\alpha + \gamma = 120^\circ. \tag{6}$$

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$, (7)

aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$. (8)

Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Damit ist bewiesen, daß auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

210824) Lösung: 12 Punkte

I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt:

Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22\ ,\ \frac{x}{3}\ ,\ \frac{x}{5}\ ,\ \frac{3}{7}x\ ,\ \frac{2}{9}x\ . \tag{1}$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfaßt, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen: Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80.$$

Durch Subtraktion von 22+x und Multiplikation mit 315 folgt

$$\begin{aligned} 105x + 63x + 135x + 70x - 315x &= 18270, \\ 58x &= 18270, \\ x &= 315. \end{aligned}$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und

22, 105, 63, 135, 70

die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

II. Werden umgekehrt diese Mitgliederzahlen für die Sektionen erreicht und wird zusätzlich erreicht[1], daß genau 72 Mitglieder zu je mindestens zwei Sektionen gehören und von diesen genau 8 zu je genau drei Sektionen, so beträgt die Mitgliederzahl der BSG wegen 22+105+63+135+70-72-8 = 315 dann 315. Also treffen damit auch die Aussagen zu, daß die Mitgliederzahlen 105, 63, 135, 70 dasselbe sind wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$ bzw. $\frac{2}{9}$ der Mitgliederzahl der BSG.

Aus I. und II. folgt: Es gibt eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen der BSG und der Sektionen so, daß alle genannten Aussagen zutreffen. Sie ist durch die Aussagen eindeutig bestimmt und lautet:

BSG: 315; Sektionen: 22, 105, 63, 135, 70.

1 Dies kann in der Tat erreicht werden, z.B. durch folgende Verteilung:

| S | F | L | Ti | Tu | SF | SL | STi | STu | FL | FTi | FTu | LTi | LTu | TiTu | SFL | SFTi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 70 | 31 | 103 | 38 | 5 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 1 | 1 |

| SFTu | SLTi | SLTu | STiTu | FLTi | FLTu | FTiTu | LTiTu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt, erst recht nicht eine Untersuchung, welche Möglichkeiten insgesamt für die Verteilung auf die einzelnen Zweier- und Dreierkombinationen bestehen.

## Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

210821

| | |
|---|---|
| Angabe (1) | 2 Punkte |
| Überlegungen, die zur Gleichung führen | 3 Punkte |
| Gleichung | 1 Punkt |
| Lösung der Gleichung | 2 Punkte |
| Angabe der Anzahlen der Mitglieder der einzelnen Sektionen | 1 Punkt |
| Probe | 3 Punkte |
| | 12 Punkte |

210822

| | |
|---|---|
| Flächeninhalt des Sektors | 2 Punkte |
| Flächeninhalt des Dreiecks | 2 Punkte |
| Differenz der beiden Flächeninhalte | 1 Punkt |
| Verdopplung der ermittelten Differenz | 1 Punkt |
| Numerische Rechnung mit der geforderten Genauigkeit | 2 Punkte |
| Allgemeine Darstellung | 2 Punkte |
| | 10 Punkte |

210823

| | |
|---|---|
| Teilaufgabe a) | 3 Punkte |
| Begründung für (4) | 3 Punkte |
| Begründung für (5) und (6) | 1 Punkt |
| Schluß auf Gleichheit der Winkel | 2 Punkte |
| Schluß auf Seitengleichheit | 1 Punkt |
| | 10 Punkte |

210824

| | |
|---|---|
| Schluß auf $a > 4$ | 2 Punkte |
| Schluß auf $a < 6$ | 2 Punkte |
| Schluß $a = 5$ | 2 Punkte |
| Probe | 2 Punkte |
| | 8 Punkte |

Anmerkung: zu 210821 Schließt ein Schüler über das k.g.V. der Zahlen 9, 7 und 5 auf 315 ohne weitere Möglichkeiten auszuschließen, werden maximal 5 Punkte erteilt.