XX. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201241

In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreiecksseiten.

Man beweise: Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

201242

In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung. Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis: Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist. Dabei gelten zwei mögliche Reihen-

folgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, \ldots, 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfens erfolgte. Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

<u>201243</u>
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$.
Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}.$$

A 11/12;II XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

201244

Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \text{ und}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

gilt.

Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

201245

Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - \left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}. \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für f(n) (d. h. einen Ausdruck, der f(n) in Abhängigkeit von n so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).

Hinweis: Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leqq x < [x] + 1$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

201246A

Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch "wiederholtes Halbieren" in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:

(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots, P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.

(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als "n-te Näherung" Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \ldots, P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man

$P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1,2,\ldots,9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)}P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$ die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleichlange Teilstrecken zerlegen, für die also

$$\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \ldots = \overline{Q_8Q_9} = \overline{Q_9B} = 1\text{m}$$

gilt.

Beweisen Sie, daß eine natürliche Zahl N so existiert, daß für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots, P_9^{(0)}$ auf AB gilt:

Bei der "n-ten Näherung" weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ ($j = 1, 2, \ldots, 9$) um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d. h., es gilt

$$\overline{P_j^{(N)}Q_j} < 1 \text{ mm.}$$

<u>201246B</u>

Ist T = ABCD ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T. Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben. Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt. Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s.

Die geforderten Eigenschaften sind:

(1) $\overline{\sphericalangle BDC} = \overline{\sphericalangle CDA} = \overline{\sphericalangle ADB} = 90^\circ$.

(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.

(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

XX. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

201241) Lösung: 5 Punkte

Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke AFE, BDF, CED entsprechend mit I_2, I_3, I_4, so gilt

$$I_1 = I - I_2 - I_3 - I_4. \qquad (1)$$

Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten BC, CA, AB entsprechend mit a, bm, c, so teilt[1] E die Seite AC im Verhältnis c:a, also ist $\overline{AE} = \frac{bc}{a+c}$. Entsprechend gilt $\overline{AF} = \frac{bc}{a+b}$.

Da die Dreiecke ABE und ABC bei Auffassung von AE bzw. AC als Grundlinie dieselbe Höhe haben, verhalten sich ihre Flächeninhalte wie $\overline{AE} : \overline{AC} = \frac{c}{a+c}$, daher hat das Dreieck ABE den Flächeninhalt $\frac{cI}{a+c}$.

Da die Dreiecke AFE und ABE bei Auffassung von AF bzw. AB als Grundlinie dieselbe Höhe haben, verhalten sich ihre Flächeninhalte wie $\overline{AF:AB} = \frac{b}{a+b}$, daher gilt

$$I_2 = \frac{bcI}{(a+b)(a+c)}. \qquad (2)$$

Entsprechend gilt

$$I_3 = \frac{acI}{(a+b)(b+c)}, \quad I_4 = \frac{abI}{(a+c)(b+c)}. \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$I_1 = I\left(1 - \frac{bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)}{(b+c)(a+c)(a+b)}\right)$$
$$= \frac{2abcI}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Nun gilt aufgrund der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

---

1 Dies ist entweder als bekannter Satz zu zitieren oder z. B. so zu beweisen: Verlängert man AB über B hinaus um a bis G, so wird wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks BCG und nach dem Außenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle BCG} = \overline{\sphericalangle BGC} = \frac{\beta}{2}$ $(\beta = \overline{\sphericalangle ABC})$, also $CG \parallel EB$, und daher nach dem Strahlensatz

$$\overline{AE}:\overline{EC} = \overline{AB}:\overline{BG} = c:a.$$

$$\frac{(b + c)(a + c)(a + b)}{8} \geqq \sqrt{bc}\,\sqrt{ac}\,\sqrt{ab} = abc.$$

Daher gilt $I_1 = \dfrac{2abcI}{(b + c)(a + c)(a + b)} \leqq \dfrac{I}{4}$, w. z. b. w.

201242) Lösung: 6 Punkte

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die verschiedenen 57gliedrigen Folgen $F = (a_1, a_2, \ldots, a_{57})$, in denen jeweils a_i die Nummer des Behälters angibt, aus dem die i-te Entnahme erfolgt. In jeder dieser Folgen kommt jede der drei Behälternummern höchstens 20 mal vor. Daher lassen sich alle zu berücksichtigenden Folgen so in Klassen einteilen, wie die nachstehende Tabelle angibt.

Anzahl des Vorkommens der Behälternummer		
1	2	3
20	20	17
20	19	18
20	18	19
20	17	20
19	20	18
19	19	19
19	18	20
18	20	19
18	19	20
17	20	20

Um die Anzahl a(u, v, w) der Folgen in derjenigen Klasse, für die die in der Tabelle genannten drei Anzahlen u, v, w lauten, zu ermitteln, ersetze man zunächst die u Folgenglieder 1 durch u verschiedene Elemente, etwa mit $1_1, \ldots, 1_u$ bezeichnet, ebenso die v Folgenglieder 2 durch v Elemente $2_1, \ldots, 2_v$ und die w Folgenglieder 3 durch w Elemente $3_1, \ldots, 3_w$. Aus den so gebildeten 57 Elementen lassen sich genau 57! verschiedene Folgen zusammenstellen. Löscht man darin die Indizes bei allen Elementen $1_1, \ldots, 1_u$, so entsteht aus je u! Folgen ein und dieselbe Folge. Entsprechendes gilt für das Löschen der Indizes bei $2_1, \ldots, 2_v$ und bei

$3_1, \ldots, 3_w$. Daher ist[1]

$$a(u,v,w) = \frac{57!}{u!v!w!}.$$

Nach der Tabelle gibt es genau drei Klassen, in denen u,v,w in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 17, 20, 20 sind, ferner genau sechs Klassen, in denen u,v,w in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 18, 19, 20 sind, und genau eine Klasse mit $u = v = w = 19$. Daher ist

$$A = \frac{3 \cdot 57!}{17!20!20!} + \frac{6 \cdot 57!}{18!19!20!} + \frac{57!}{19!19!19!}.$$

Genau diejenigen Folgen, die der Klasse mit $u = v = w = 19$ angehören, entsprechen den Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem Behälter genau ein Karpfen ist. Daher gilt

$$G = \frac{57!}{19!19!19!}.$$

Hiernach ergibt sich

$$A = \frac{57!}{17!19!19!}\left(\frac{3}{20 \cdot 20} + \frac{6}{18 \cdot 20} + \frac{1}{18 \cdot 19}\right) = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{513 + 1140 + 200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$G = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{1}{18 \cdot 19} = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}.$$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{200}{1853} = 0{,}108.$$

<u>201243) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Eine reelle Zahl x ist genau dann Lösung, wenn für sie $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ gelten und das Polynom

$$P(x) = a^2(a^2-1)^2(x^4+1)(x^4+6x^2+1) - (a^4+1)(a^4+6a^2+1)x^2(x^2-1)^2$$

die Gleichung $P(x) = 0$ erfüllt. Dieses Polynom lautet

$$P(x) = (a^6-2a^4+a^2)x^8 - (a^8+14a^4+1)x^6 + 2(a^8+7a^6+7a^2+1)x^4$$
$$- (a^8+14a^4+1)x^2 + a^6-2a^4+a^2.$$

An der ursprünglichen Form der Gleichung ist ersichtlich, daß $x = a$ und $x = -a$ Lösungen sind. Also ist das Polynom $P(x)$ durch $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ teilbar. Die Division ergibt

$$Q(x) = P(x):(x^2-a^2) = (a^6-2a^4+a^2)x^6 - (2a^6+13a^4+1)x^4$$
$$+ (a^6+13a^2+2)x^2 + (-a^4+2a^2-1).$$

An der ursprünglichen Form der Gleichung ist ebenfalls ersichtlich: Setzt man $x = \frac{1}{a}$ oder $x = -\frac{1}{a}$ auf der linken Seite ein und erweitert den entstehenden Bruch mit a^8, so erhält man einen Aus-

1 Diese Formel kann auch als bekannt zitiert werden.

druck, der gleich der rechten Seite ist. Daher sind auch $x = \frac{1}{a}$ und $x = -\frac{1}{a}$ Lösungen; folglich ist $Q(x)$ durch $a^2(x - \frac{1}{a})(x + \frac{1}{a}) = a^2x^2 - 1$ teilbar. Die Division ergibt

$R(x) = Q(x):(a^2x^2 - 1) = (a^4-2a^2+1)x^4 - 2(a^4+6a^2+1)x^2 + a^4-2a^2+1$.

Wegen $|a| \neq 1$ ist $a^4-2a^2+1 = (a^2-1)^2 \neq 0$. Also ist die Gleichung $R(x) = 0$ äquivalent mit

$$x^4 - 2\,\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}\,x^2 + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x^2 mit der Diskriminante

$$\left(\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}\right)^2 - 1 = \frac{16a^2(a^2 + 1)^2}{(a^2 - 1)^4}.$$

Daher hat $R(x) = 0$ genau diejenigen x als Lösung, für die eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{(a^2 - 1)^2} \pm \frac{4a(a^2 + 1)}{(a^2 - 1)^2},$$

d. h., eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{(a + 1)^4}{(a^2 - 1)^2}, \quad x^2 = \frac{(a - 1)^4}{(a^2 - 1)^2}$$

gilt. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen positiv sind, sind dies genau die Zahlen

$$x = \frac{a+1}{a-1}, \quad x = -\frac{a+1}{a-1}, \quad x = \frac{a-1}{a+1}, \quad x = -\frac{a-1}{a+1}.$$

Wegen $a \neq 1$ und $a \neq -1$ gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 0$. Ferner ist $a+1 \neq a-1$ und wegen $a \neq 0$ auch $a+1 \neq -a+1$, also gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 1$ und $x \neq -1$.

Damit ist bewiesen, daß die gegebene Gleichung genau die Zahlen

$$x = a,\ -a,\ \frac{1}{a},\ -\frac{1}{a},\ \frac{a+1}{a-1},\ -\frac{a+1}{a-1},\ \frac{a-1}{a+1},\ -\frac{a-1}{a+1}$$

als Lösung besitzt.

<u>Hinweis:</u> Nicht nur $\pm a$ und $\pm \frac{1}{a}$ lassen sich auf die beschriebene Weise unmittelbar als Lösung erkennen, sondern z. B. vermittels der Umformung

$$\frac{(x^4 + 1)(x^4 + 6x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)$$

auch $x = \pm \frac{a+1}{a-1}$ und $x = \pm \frac{a-1}{a+1}$. Nun könnte man versuchen, die Nichtexistenz anderer Lösungen ohne weitere Rechnung damit zu begründen, daß $P(x)$ als Polynom 8. Grades nicht mehr als 8 Nullstellen haben kann. In dieser Gestalt wäre der Beweis lückenhaft, da die angegebenen Lösungen nicht alle verschieden zu sein brauchen.

XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>201244) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für alle $n \geqq 1$ gilt nach Definition

$(a_{n+1} - 2a_n)^2 = 3a_n^2 + 1$, also

$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 = 1$.

Für alle $n \geqq 2$ gilt also

$a_n^2 - 4a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 = 1$

und daher

$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 - 4a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = 0$,

$$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 4a_n) = 0. \qquad (1)$$

Für alle $n \geqq 2$ gilt ferner $a_{n+1} > 2a_n > a_n$, ebenso $a_n > a_{n-1}$, also

$$a_{n+1} - a_{n-1} \neq 0.$$

Daher folgt aus (1)

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}. \qquad (2)$$

Da $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ ganzzahlig sind, folgt aus (2) der Reihe nach, daß auch $a_3, a_4, a_5, \ldots$ ganzzahlig sind.

Also sind alle Glieder der gegebenen Folge ganzzahlig.

<u>Andere Herleitung von (2):</u>

Aus $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$ folgt

$$3a_{n+1}^2 = 21a_n^2 + 12a_n\sqrt{3a_n^2 + 1} + 4 = 9a_n^2 + 12a_n\sqrt{3a_n^2 + 1} + 4(3a_n^2 + 1) = (3a_n + 2\sqrt{3a_n^2 + 1})^2.$$

Ferner folgt, daß alle a_n positiv sind. Daher ergibt sich weiter

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} = 2a_{n+1} + 3a_n + 2\sqrt{3a_n^2 + 1}$$
$$= 2a_{n+1} + 2(2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}) - a_n = 4a_{n+1} - a_n.$$

201245) Lösung: 7 Punkte

Die in (1) für $k = 1$ bis $k = n^2$ zu bildenden Summanden lassen sich zu n Teilsummen s_m $(m = 0,\dots,n-1)$ zusammenfassen, indem jeweils s_m die Summanden aus (1) mit denjenigen k enthält, für die $m^2 + 1 \leqq k \leqq (m+1)^2$ gilt. In diesen ist $m^2 \leqq k-1 < (m+1)^2$, also $m \leqq \sqrt{k-1} < m+1$, d. h. $m = [\sqrt{k-1}]$. Also wird

$$s_m = \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = (n - m) \cdot \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

Darin ist

$$\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$= \sqrt{m^2+1} - m + \sqrt{m^2+2} - \sqrt{m^2+1} + - \dots + (m+1) - \sqrt{(m+1)^2 - 1}$$

$$= 1.$$

Somit ergibt sich $s_m = n - m$ $(m = 0,\dots,n-1)$ und daher

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n-1} s_m = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Damit ist ein Ausdruck der verlangten Art ermittelt.

201246A) Lösung: 8 Punkte

Es seien $P_1^{(0)}, P_2^{(0)},\dots,P_9^{(0)}$ beliebig auf AB gewählt.
Für jedes k mit $k = 0,1,\dots,10$ und jedes natürliche n mit $n \geqq 0$ werden reelle Zahlen $e_k^{(n)}$ definiert:

$$e_k^{(n)} = \overline{AP_k^{(n)}} - \overline{AQ_k}, \qquad (1)$$

wobei $Q_0 = A$ und $Q_{10} = B$ gesetzt werden und alle Längenangaben in der Maßeinheit Meter angegeben sind.

Dann gilt

$$e_0^{(n)} = \overline{AA} - \overline{AA} = 0,$$

$$e_{10}^{(n)} = \overline{AB} - \overline{AB} = 0,$$

und wegen

$$0 \leqq \overline{AP_k^{(n)}},\ \overline{AQ_k} \leqq \overline{AB} = 10$$

$$\left|e_k^{(n)}\right| \leqq 10. \qquad (2)$$

Ferner folgt aus der Definition der $P_k^{(n+1)}$

$$e_k^{(n+1)} = \overline{AP_k^{(n+1)}} - \overline{AQ_k}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{AP_{k-1}^{(n+1)}} + \overline{AP_{k+1}^{(n)}}\right) - \frac{1}{2}(\overline{AQ_{k-1}} + \overline{AQ_{k+1}})$$

$$= \frac{1}{2}(e_{k-1}^{(n+1)} + e_{k+1}^{(n)}). \qquad (3)$$

Wir beweisen zunächst folgende Hilfsaussage: Sind für eine natürliche Zahl n und für m eine positive reelle Zahl z alle

$$\left|e_k^{(n)}\right| \leqq z \quad (k = 0,1,\ldots,10), \qquad (4)$$

so gelten für k = 0,1,...,10 die Ungleichungen

$$\left|e_k^{(n+1)}\right| \leqq z(1 - \frac{1}{2^k}). \qquad (5)$$

<u>Beweis:</u> Für k = 0 und k = 10 ist wegen $e_0^{(n+1)} = e_{10}^{(n+1)} = 0$ die Ungleichung (5) erfüllt. Wenn (5) für k = j-1 gilt, wobei j eine der Zahlen 1,2,...,9 ist, so folgt nach (3) und (4) auch

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\left|e_{j-1}^{(n+1)}\right| + \left|e_{j+1}^{(n)}\right| \right)$$

$$\leqq \frac{1}{2}(z(1 - \frac{1}{2^{j-1}}) + z) = z(1 - \frac{1}{2^j}).$$

Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Aus (5) folgt wegen k $\leqq$ 10 erst recht $\left|e_k^{(n+1)}\right| \leqq z(1 - \frac{1}{2^{10}}) = z\frac{1023}{1024}$,

(k = 0,1,...,10).

Beginnend mit n = 0 (siehe (2)) ergibt sich daraus durch vollständige Induktion über n

$$e_k^{(n)} = 10(\frac{1023}{1024})^n \quad (k = 0,1,\ldots,10;\ n = 0). \qquad (6)$$

Aus (6) gelangt man zu dem geforderten Nachweis[1]:
Es gibt eine natürliche Zahl N mit $N > \frac{4}{\lg 1024 - \lg 1023}$, für die $N(\lg 1023 - \lg 1024) < -4$, also

$$\left(\frac{1023}{1024}\right)^N < \frac{1}{10\,000}$$ und damit wegen (1) und (6)

$$\overline{P_k^{(N)}Q_k} = \left|\overline{AP_k^{(N)}} - \overline{AQ_k}\right| = \left|e_k^{(N)}\right| \leqq 10\left(\frac{1023}{1024}\right)^N < \frac{1}{1000} \quad (k = 0,1,\ldots,10)$$

gilt, wie gezeigt werden sollte.

<u>201246B) Lösung:</u>

Es sei T ein Tetraeder mit den Eigenschaften (1), (2), (3); darin sei $\overline{AD} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$. Dann hat T nach (1) als Pyramide mit der Grundfläche des Dreiecks ABD vom Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ ab und der zugehörigen Höhe der Länge c das Volumen $\frac{1}{6}$ abc; nach (3) gilt daher $abc = 1$. Aus (2) sowie durch geeignete Wahl der Bezeichnungen erhält man $\frac{1}{6} \leqq a \leqq b \leqq c$. Hieraus folgt $1 = abc \leqq c^3$; ferner $1 \leqq 6a \leqq 6b$, also $c \leqq 6a \cdot 6b \cdot c = 36$ und $abc = 1 \leqq 6a$. Daher gelten die Ungleichungen

$$1 \leqq c \leqq 36 \tag{4}$$

und

$$a \leqq b \leqq \frac{6}{c}. \tag{5}$$

Die zu untersuchende Summe ist nach (1) und dem Satz des Pythagoras

$$s = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}.$$

---

1 <u>Hinweis zur Korrektur:</u> Der geforderte Nachweis kann statt mit einer konkreten Abschätzung auch auf der Grundlage der als bekannt zu zitierenden Relation $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$ geführt werden.
Bei anderen Lösungswegen durch Abschätzung sind auch stark abweichende Angaben für N möglich. Die in vorliegender Lösung angegebene Schranke

$$\frac{4}{\lg 1024 - \lg 1023} \approx 9426{,}8$$

für N ist wegen der im obigen Beweis mehrfach vorgenommenen Vergröberungen wesentlich größer als bei optimaler Abschätzung, bei der man $N \geqq 91$ erhält.

Für sie gilt nach (5)

$$s \leqq \frac{6}{c} + \frac{6}{c} + c + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + \left(\frac{6}{c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + c^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + c^2}$$

$$= c + \frac{6(2 + \sqrt{2})}{c} + 2\sqrt{c^2 + \frac{36}{c^2}}.$$

Es seien f und g die im Intervall $1 \leqq c \leqq 36$ durch

$$f(c) = c + \frac{6(2+\sqrt{2})}{c}, \quad g(c) = c^2 + \frac{36}{c^2}$$

definierten Funktionen. Für ihre Ableitungen gilt

$$f'(c) = 1 - \frac{6(2+\sqrt{2})}{c^2}, \quad g'(c) = 2c - \frac{72}{c^3}.$$

Daher ist $f'(c) > 0$ bzw. $g'(c) > 0$ für alle diejenigen c, für die $c^2 > 6(2 + \sqrt{2})$ bzw. $c^2 > 6$ gilt.

Im Intervall $10 \leqq c \leqq 36$ ist dies z. B. der Fall; daher sind f und g in diesem Intervall steigend, und es folgt[1]

$$f(c) \leqq f(36) = 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6}, \quad g(c) \leqq g(36) = 36^2 + \frac{1}{36},$$

$$f(c) + 2\sqrt{g(c)} \leqq 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}}. \tag{6}$$

Auch im Intervall $1 \leqq c < 10$ gilt (6), wie für diese c aus

$$c + \frac{6(2+\sqrt{2})}{c} + 2\sqrt{c^2 + \frac{36}{c^2}} < 10 + 6(2 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{100 + 36}$$

$$< 10 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 12$$

$$< 3 \cdot 36 < 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}}$$

ersichtlich ist.

Damit ist bewiesen, daß für alle Tetraeder mit (1), (2), (3)

$$s \leqq 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}} \tag{7}$$

gilt.

---

1 Herleitungsmöglichkeit ohne Differentialrechnung:
Für $0 < u \leqq x \leqq v$ gilt $u^2 \leqq vx$ und $v - x \geqq 0$, also $u^2(v - x) \leqq vx(v - x)$, also $vx^2 + u^2v \leqq v^2x + u^2x$, wegen $vx > 0$ also $x + \frac{u^2}{x} \leqq v + \frac{u^2}{v}$. Dies wende man einmal mit $x = c$, $u = \sqrt{6(2+\sqrt{2})}$, $v = 36$, einmal mit $x = c^2$, $u = 6$, $v = 36^2$ an.

Setzt man aber speziell $a = b = \frac{1}{6}$ und $c = 36$, so sind (da die übrigen Kantenlängen von T nach dem Satz des Pythagoras erst recht größer als a sind) (2) und (3) erfüllt, und man erhält in (7) das Gleichheitszeichen.

Damit ist gezeigt: Es gibt unter allen Tetraedern T mit den Eigenschaften (1), (2), (3) eines, für das s einen größten Wert annimmt, und dieser ist die auf der rechten Seite von (7) angegebene Zahl.

Erreichte Punktzahlen:

0	1	2	3	4	5	6
25	2	1	2	0	6	36

Aufgabe: 20 12 45

Typische Fehler:

Unzureichende oder fehlende Begründungen bei Umformungen der auftretenden Ausdrücke (z.B. $[\sqrt{k-1}] = m$ für $m^2 + 1 \leq k \leq (m+1)^2$), relativ oft wurde die Umformung $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)}$ nicht erkannt.

Erreichte Punktzahlen:

0	1	2	3	4	5	6	7
12	2	4	1	3	2	16	32

Keinerlei Lösungsversuche: 6

Aufgabe: 20 12 46B

Typische Fehler:

Notwendige Abschätzungen und Begründungen wurden z.T. durch Plausibilitätsausführungen ersetzt. Es gab häufig falsche Schlüsse bei den Untersuchungen der Extremwerte von Funktionen zweier Variabler.

Erreichte Punktzahlen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	16	15	8	7	0	0	2	6

Aufgabe: 20 12 46A

Typische Fehler:

Überlesen der Konstruktionsvorschrift der Punktfolge: Statt Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$ wurde $P_{j-1}^{(n)} P_{j+1}^{(n)}$ genommen.

Erreichte Punktzahlen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	0	1	1	0	1	0	2