A 11/12;I XX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201231

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geqq 0, \tag{1}$$

$$2x^3 + x - 1 < 0, \tag{2}$$

$$x^3 - x > 0. \tag{3}$$

201232

Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f

a) die Menge aller ganzen Zahlen,

b) die Menge aller reellen Zahlen

ist.

Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

Von den folgenden Aufgaben 201233 A und 201233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

201233 A

Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:

A 11/12;I

Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1 + a^n} < b + \frac{1}{1 + b^n}.$$

<u>201233 B</u>

Ist f eine im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:

(1) Für jedes reelle x mit $0 \leqq x \leqq 1$ gilt $f(x) \geqq 0$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für jedes reelle x_1 mit $0 \leqq x_1 \leqq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0 \leqq x_2 \leqq 1$ und $x_1 + x_2 \leqq 1$ gilt $f(x_1+x_2) \geqq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Man beweise:

Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) < 2x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leqq 1$.

b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:

Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) \leqq 1{,}99 \cdot x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leqq 1$.

A 11/12;II XX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

201234

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

201235

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:

Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich 3 n ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

201236

Man zeige, daß zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B > 1$ eine natürliche Zahl $C \geqq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern "Null" und "Eins" besteht und durch n teilbar ist.

L 11/12;I XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

201131) Lösung: **~~6~~ 5 Punkte**

Für alle reellen

$$x \geqq 1$$

gilt $2x^3 > 0$ und $x - 1 \geqq 0$, also ist (2) nicht erfüllt.

Wegen $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ist (3) für alle reellen

$$x \leqq -1$$

nicht erfüllt; denn für sie ist $x < 0$, $x-1 < 0$ und $x+1 \leqq 0$.

Ferner ist (3) für alle reellen x mit

$$0 \leqq x < 1$$

nicht erfüllt; denn für sie ist $x \geqq 0$, $x+1 > 0$ und $x-1 < 0$.

Für alle reellen x mit

$$-1 < x < 0$$

dagegen gilt:

Wegen $x < 0$, $x-1 < 0$ und $x+1 > 0$ ist (3) erfüllt, wegen $x^4 > 0$, $x^2 > 0$, $-2x > 0$ ist (1) erfüllt, wegen $2x^3 < 0$, $x - 1 < 0$ ist (2) erfüllt. Daher erfüllen genau alle Zahlen x mit $-1 < x < 0$ jede Ungleichung des Systems (1), (2), (3).

201232) Lösung: **7 ~~6~~ Punkte**

Es gilt
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-(x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (x^4+8x^3+24x^2+32x+16) \\ &\quad + x^4+12x^3+54x^2+108x+81 \\ &= 24x^2 + 72x + 64 = 24\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 10. \end{aligned}$$

Daraus folgt: Für alle reellen x gilt $f(x) \geqq 10$, und es gilt $f(-\frac{3}{2}) = 10$. Also nimmt die Funktion f im Fall b) einen kleinsten Funktionswert an, und dieser beträgt 10.

Ferner folgt:

Für alle (ganzzahligen)[1] x mit $x \geqq -1$ gilt $x+\frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2}$, also

$$f(x) \geqq 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 = 16,$$

für alle (ganzzahligen)[1] x mit $x \leqq -2$ gilt $x+\frac{3}{2} \leqq -\frac{1}{2}$, also $-(x+\frac{3}{2}) \geqq \frac{1}{2}$, also $f(x) = 24\cdot\left(-(x+\frac{3}{2})\right)^2 + 10 \geqq 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 = 16$;

also gilt $f(x) \geqq 16$ für alle ganzzahligen x,
und es gilt $f(-1) = 16$ (sowie $f(-2) = 16$)[1].
Also nimmt die Funktion f im Fall a) einen kleinsten Wert an, und dieser beträgt 16.

201233A) Lösung: 7 ~~8~~ Punkte

Für reelle Zahlen a,b mit $0 < a < b$ ist die in der Aufgabe genannte Ungleichung äquivalent mit

$$a(1 + a^n)(1 + b^n) + 1 + b^n < b(1 + a^n)(1 + b^n) + 1 + a^n$$

und dies mit

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} < 1 + a^n + b^n + a^n b^n. \qquad (1)$$

Diese Ungleichung lautet im Fall $n = 0$

$$0 < 4,$$

im Fall $n - 1$

$$1 < 1 + a + b + ab.$$

In diesen Fällen ist sie also für alle $0 < a < b$ erfüllt.
Im Fall $n = 2$ lautet (1)

$$a + b < 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2.$$

Auch dies ist für alle a, b mit $0 < a < b$ erfüllt; denn für sie gilt

$$1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 - a - b = (a - \tfrac{1}{2})^2 + (b - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2} + a^2b^2 > 0.$$

Im Fall $n = 3$ lautet (1)

$$a^2 + ab + b^2 < 1 + a^3 + b^3 + a^3b^3.$$

Um auch dies für alle a, b mit $0 < a < b$ zu beweisen, kann man folgendermaßen vorgehen: Für alle reellen $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}(x - \tfrac{2}{3})^3 + (x - \tfrac{2}{3})^2 &= x^3 - 2x^2 + \tfrac{4}{3}x - \tfrac{8}{27} + x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9}\\ &= x^3 - x^2 + \tfrac{4}{27},\end{aligned}$$

also $x^3 - x^2 = (x - \frac{2}{3})^2(x - \frac{2}{3} + 1) - \frac{4}{27} \geqq -\frac{4}{27}$
sowie

$$\begin{aligned}(x - \frac{1}{\sqrt{3}})^3 + \sqrt{3}(x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 &= x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + x - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{3}}\\ &= x^3 - x + \frac{2}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

---

1 Diese Angaben sind an den genannten Stellen des Lösungstextes nicht erforderlich.

also $x^3 - x = (x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 (x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \geqq - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Damit ergibt sich für alle a, b mit $0 < a < b$

$$1 + a^3-a^2 + b^3-b^2 + a^3b^3-ab \geqq 1 - 2\cdot \frac{4}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 1 - \frac{8}{27} - \frac{2}{3} > 0,$$

wie behauptet.

Im Fall $n \geqq 4$ lautet (1)

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} < 1 + a^n + b^n + a^nb^n.$$

Man kann nun zeigen, daß schon zu (je einem $n \geqq 4$ und z. B.) $b = 1$ ein reelles a mit $0 < a < 1$ existiert, für das (1), d. h.

$$1 + a + \ldots + a^{n-1} < 2\ (1 + a^n),$$

nicht gilt. Beispielsweise für $a = 0{,}9$ ist

$$a^2 > 0{,}8, \quad a^3 > 0{,}7, \quad a^4 < 0{,}7,$$

also

$$\begin{aligned} 1 + a + \ldots + a^{n-1} &\geqq 1 + a + a^2 + a^3 \\ &> 1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 = 2(1 + 0{,}7) \\ &> 2(1 + a^4) \\ &\geqq 2(1 + a^n). \end{aligned}$$

Somit sind genau

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

die gesuchten Zahlen.

<u>Andere Möglichkeiten</u> für benötigte Abschätzungen sind z. B.:

Für alle reellen x ist $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geqq - \frac{1}{4}$;

für alle x mit $0 < x < 1$ ist $x^3 - x^2 = x(x^2 - x) \geqq - \frac{1}{4}x > - \frac{1}{4}$,

für alle $x \geqq 1$ ist sogar $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geqq 0$. Also gilt:

Für alle reellen $x > 0$ ist $x^3 - x^2 > - \frac{1}{4}$,

$$x^3 - x = (x^3 - x^2) + (x^2 - x) > - \frac{1}{2}.$$

Ferner kann man aus $a + \frac{1}{1 + a^n} < b + \frac{1}{1 + b^n}$ für alle $a < b = 1$

auch z. B. folgendermaßen herleiten, daß $n < 4$ sein muß:

Aus $a + \frac{1}{1 + a^n} < \frac{3}{2}$ folgt, etwa für $a = \frac{2}{3}$;

$$\frac{1}{1 + a^n} < \frac{5}{6}, \quad a^n > \frac{1}{5}, \quad (\frac{3}{2})^n < 5 < (\frac{3}{2})^4.$$

201233B) Lösung: 8 Punkte

a) Wenn f den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so folgt durch wiederholte Anwendung von (3) zunächst:

(4) Für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ gilt:
Ist $0 \leqq kx \leqq 1$, so ist $f(kx) \geqq k \cdot f(x)$.

Weiter ergibt sich:

(5) f ist monoton steigend.

Aus $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq 1$ folgt nämlich wegen $0 \leqq x_2 - x_1 \leqq 1$ nach (3) und (1) stets $f(x_2) = f(x_1 + x_2 - x_1) \geqq f(x_1) + f(x_2 - x_1) \geqq f(x_1)$.

Nun erhält man:

Für jedes x mit

$$\frac{1}{2} < x \leqq 1 \qquad (6)$$

folgt wegen (5) und (2) die Behauptung aus $f(x) \leqq f(1) = 1 < 2x$;

für jedes x mit

$$\frac{1}{4} < x \leqq \frac{1}{2} \qquad (7)$$

folgt $0 < 2x \leqq 1$, also nach (4), (5) und (2) die Behauptung aus $2f(x) \leqq f(2x) \leqq f(1) = 1 < 4x$;

....

für jedes n = 2, 3, ... und jedes x mit

$$\frac{1}{2^{n+1}} < x \leqq \frac{1}{2^n} \qquad (8)$$

folgt $0 < 2^n x \leqq 1$, also nach (4), (5) und (2) die Behauptung aus $2^n f(x) \leqq f(2^n x) \leqq f(1) = 1 < 2^{n+1}x$.

Da jedes x mit $0 < x \leqq 1$ entweder die Ungleichung (6) oder (7) oder für ein n = 2, 3, ... die Ungleichung (8) erfüllt, ist hiermit die Behauptung $f(x) < 2x$ für alle x mit $0 < x \leqq 1$ bewiesen.

b) Nicht jede Funktion f, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, erfüllt $f(x) \leqq 1{,}99 \cdot x$ für alle x mit $0 < x \leqq 1$.

Zum Beweis ist die Angabe eines Beispiels ausreichend, etwa des folgenden: f sei die Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leqq 1 \end{cases}.$$

Für sie gelten (1) und (2), und sie erfüllt auch (3); denn sind x_1, x_2 reelle Zahlen mit $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1$ und $x_1 + x_2 \leqq 1$, so ist entweder $x_1 + x_2 \leqq \frac{1}{2}$ und dann $x_1 \leqq \frac{1}{2}$, $x_2 \leqq \frac{1}{2}$, also

$$f(x_1 + x_2) = 0 = f(x_1) + f(x_2)$$

oder $\frac{1}{2} < x_1 + x_2 \leqq 1$ und somit höchstens eine der Zahlen x_1, x_2 größer als $\frac{1}{2}$, also

$$f(x_1 + x_2) = 1 \geqq f(x_1) + f(x_2).$$

Andererseits erfüllt z. B. $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{400}$ nicht die Ungleichung $f(x) \leqq 1{,}99 \cdot x$, sondern $1{,}99 \cdot x < f(x)$; denn für dieses x gilt

$$1{,}99 \cdot x = \left(2 - \frac{1}{100}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{400}\right) < 1 = f(x).$$

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

201234) Lösung: 6 ~~5~~ Punkte

Angenommen, für eine ganze Zahl k besitze die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0 \qquad (1)$$

eine Lösung x. Dann folgt durch Multiplikation mit $x(k-4)$, daß x auch eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{k}{2}\cdot x + k^2 - 16 = 0 \qquad (2)$$

ist. Für deren Diskriminante $\frac{k^2}{16} - k^2 + 16 = \frac{1}{16}(256 - 15k^2)$ muß somit

$$\frac{1}{16}(256 - 15k^2) \geqq 0 \qquad (3)$$

gelten, und x ist eine der Zahlen

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-k \pm \sqrt{256 - 15k^2}\right). \qquad (4)$$

Aus (3) folgt $15k^2 \leqq 256$; also kann eine ganze Zahl k nur dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn sie

$$|k| \leqq 4 \qquad (5)$$

erfüllt.

Gilt (5) für eine ganze Zahl k, so folgt (3), und k hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn mindestens eine der zu k gemäß (4) gehörenden Zahlen $x_{1,2}$ auch die Gleichung (1) erfüllt, und wenn alle diejenigen $x_{1,2}$, die auch (1) erfüllen, ganz sind.

(Dabei kann man die Feststellung, ob (1) erfüllt wird, entweder durch Einsetzen von k und x in (1) oder aber folgendermaßen treffen: Die wegen (3) existierenden Zahlen (4) erfüllen jedenfalls (2). Hieraus folgt (1), sobald man (2) durch $x(k-4)$ dividieren kann, d. h. sobald $k \neq 4$ und $x \neq 0$ ist.)

Hiernach ergibt sich:

k = 0 hat die verlangte Eigenschaft; denn $x_{1,2} = \pm 4$ erfüllen (1) und sind ganz.

k = 1 und k = -1 haben die verlangte Eigenschaft nicht; denn für diese k gilt $\sqrt{256 - 15k^2} = \sqrt{241}$, und daher sind die Zahlen $x_{1,2}$ in (4) irrational.

k = 2 und k = -2 haben die verlangte Eigenschaft; denn die Zahlen in (4) lauten

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{196}),\ \text{d. h. } x_1 = 3,\ x_2 = -4$$

bzw.

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{196}),\ \text{d. h. } x_1 = 4,\ x_2 = -3,$$

sie sind also ganz und erfüllen (jeweils für k = 2 bzw. k = -2) auch (1).

k = 3 und k = -3 haben die verlangte Eigenschaft nicht; denn jeweils eine der Zahlen in (4) lautet

$$x_2 = \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{121}) = -\frac{7}{2}$$

bzw.

$$x_1 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{121}) = \frac{7}{2},$$

ist also nicht ganz, erfüllt jedoch (1).

k = 4 hat die verlangte Eigenschaft nicht; denn für k = 4 ist die linke Seite der Gleichung (1) nicht definiert (und kann schon aus diesem Grunde keine Lösung x haben).

k = -4 hat die verlangte Eigenschaft; denn die Zahlen in (4) lauten $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Von ihnen erfüllt genau x_1 die Gleichung (1), und x_1 ist ganz.

Daher sind die gesuchten k genau die Zahlen

0, 2, -2, -4.

<u>201235) Lösung:</u> ~~7~~ 8 <u>Punkte</u>

Angenommen, es gäbe für eine natürliche Zahl n ein regelmäßiges 3n-Eck $V = A_1 A_2 \ldots A_{3n}$ und zu ihm ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes von V rationale Zahlen sind. Dann folgte:

$A_nA_{2n}A_{3n}$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Höchstens eine seiner Seiten kann zur y-Achse des Koordinatensystems parallel sein, o. B. d. A. haben also $s = A_nA_{2n}$ und $s' = A_nA_{3n}$ Anstiegswinkel der Größen α bzw. α', die von 90° verschieden sind. Ihre Differenz beträgt 60°, o. B. d. A. in der Reihenfolge

$$\alpha' - \alpha = 60^\circ.$$

A_{k_n} habe die Koordinaten (x_k, y_k) $(k = 1, 2, 3)$. Dann gilt

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \tan \alpha' = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Setzt man dies in

$$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha}$$

ein, so erhält man den Widerspruch, daß $\sqrt{3}$ gleich einer rationalen Zahl ist.

Daher ist die eingangs gemachte Annahme falsch, w. z. b. w.

201236) Lösung: 7 Punkte

Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ und $B > 1$ bilde man die $n+1$ Zahlen

$$\begin{aligned}
[1]_B &= 1, \\
[11]_B &= B + 1, \\
[111]_B &= B^2 + B + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[11\ldots1]_B &= B^n + B^{n-1} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

Bei Division dieser Zahlen durch n muß mindestens einer der n Reste 0, 1, ..., n-1 mehrfach auftreten, d. h., es muß unter den Zahlen zwei geben, die bei Division durch n denselben Rest lassen. Subtrahiert man die kleinere dieser beiden Zahlen von der größeren, so erhält man eine Zahl C mit den behaupteten Eigenschaften.

Hinweis: Der Aufgabentext könnte die Deutung als möglich erscheinen lassen, daß für C sowohl das Vorkommen von mindestens einer Ziffer "Eins" als auch das Vorkommen von mindestens einer Ziffer "Null" gefordert wird. Der obige Lösungsweg führt auf ein solches C. Es kann aber auch vorkommen, daß bereits eine der Zahlen $[11\ldots1]_B$ durch n teilbar ist.

Die Wertung einer solchen Zahl als C im Sinne der Aufgabenstellung sollte auch akzeptiert werden.