A 11/12

XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
1. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201221

Für jedes n = 1,2,3,... sei

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k .$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$I_1 = \langle 1;2\rangle$,

$I_2 = \langle 0,53;\ 0,531\rangle$,

$I_3 = \langle 0,509;\ 0,51\rangle$,

$I_4 = \langle 0,4\ ;\ 0,5\ \rangle$.

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge (a_n) liegen. Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

201222

Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \quad b = \frac{k+1}{2}, \quad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

201223

An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal. Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.
Nach Abschluß des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze 1, 2, ..., n der Abschlußtabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)

Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlußtabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

201224

Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x) = a_o + a_1x + \dots + a_nx^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_o, a_1, \dots, a_n$ gibt, das

a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;

b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.

Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

201221) Lösung: **9 Punkte**

Für jedes n = 1,2,3,... gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n\,(n+1), \text{ also } a_n = \frac{1}{2n^2}\,(n^2+n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Somit ist $a_n \in I_1$, $a_n \in I_2$, $a_n \in I_3$ bzw. $a_n \in I_4$ jeweils der Reihe gleichbedeutend mit den anschließend gegebenen Ungleichungen:

$a_n \in I_1$	$a_n \in I_2$	$a_n \in I_3$
$1 \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqq 2$	$0{,}53 \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqq 0{,}531$	$0{,}509 \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqq 0{,}51$
$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2n} \leqq \frac{3}{2}$	$\frac{3}{100} \leqq \frac{1}{2n} \leqq \frac{31}{1000}$	$\frac{9}{1000} \leqq \frac{1}{2n} \leqq \frac{1}{100}$
$2 \geqq 2n \geqq \frac{2}{3}$	$\frac{100}{3} \geqq 2n \geqq \frac{1000}{31}$	$\frac{1000}{9} \geqq 2n \geqq 100$
$\frac{1}{3} \leqq n \leqq 1$	$\frac{500}{31} \leqq n \leqq \frac{50}{3}$	$50 \leqq n \leqq \frac{500}{9}$

$a_n \in I_4$
$0{,}4 \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqq 0{,}5$
$-0{,}1 \leqq \frac{1}{2n} \leqq 0$

Wegen $16 < \frac{500}{31}, \frac{50}{3} < 17$; $55 < \frac{500}{9} < 56$ sowie wegen $\frac{1}{2n} > 0$ für alle n = 1,2,3,... ergibt sich damit: Es gilt

$a_n \in I_1$ genau für n = 1,
$a_n \in I_2$ für kein n,
$a_n \in I_3$ genau für n = 50, 51, 52, 53, 54, 55,
$a_n \in I_4$ für kein n.

201222) Lösung: **10 Punkte**

Für jedes positive reelle k gilt $(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4k \geqq 4k$, also

$$\frac{k+1}{2} \geqq \frac{2k}{k+1} \quad \text{und}$$

$$\frac{k+1}{2} \geqq \sqrt{k}\ .$$

Wenn nun k eine positive reelle Zahl ist, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1},\quad b = \frac{k+1}{2},\quad c = \sqrt{k}$$ die Maßzahlen der Seitenlängen

eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt:

Es gilt $b \geqq a$ und $b \geqq c$, also ist b die Maßzahl der Hypotenusenlänge, und nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\frac{(k+1)^2}{4} = \frac{4k^2}{(k+1)^2} + k,$$

$$(k+1)^4 = 16k^2 + 4k(k+1)^2,$$

$$k^4-18k^2+1= 0,$$

$$k^2 = 9 \pm \sqrt{80}\ ,$$

$$k = \sqrt{9 \pm 4\sqrt{5}} \quad (= \sqrt{5} \pm 2)^{*} \qquad (1)$$

Wegen $4\sqrt{5} = \sqrt{80} < 9$ existieren nämlich diese Wurzeln (näherungsweise $k \approx 4{,}236$ bzw. $k \approx 0{,}236$)*.

Umgekehrt erfüllen diese beiden Werte die angegebenen Gleichungen; daher haben sie nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die geforderte Eigenschaft.

Somit sind genau die beiden in (1) angegebenen Zahlen die gesuchten.

---

* Diese Angaben werden vom Schüler nicht gefordert.

201223) Lösung: 10 Punkte

Für jedes mögliche Turnier und je zwei Mannschaften, die in der Abschlußtabelle unmittelbar benachbarte Plätze k und k+1 ($1 \leqq k \leqq n-1$) einnehmen, gilt:

Die Mannschaften, die auf den Plätzen 1, ..., k liegen, haben untereinander $\frac{k(k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k\cdot(k-1)$ Punkte erhalten. Außerdem haben diese Mannschaften gegen die Mannschaften, die auf den Plätzen k+1, k+2, ..., n liegen, insgesamt $k\cdot(n-k)$ Spiele ausgetragen und dabei insgesamt höchstens $2k\cdot(n-k)$ Punkte erhalten.

Die Mannschaften der Plätze 1 bis k haben also insgesamt nicht mehr als $k(k-1) + 2k(n-k) = k(2n - k-1)$ Punkte erhalten.

Hieraus folgt, daß die Mannschaft auf Platz k nicht mehr als 2n-k-1 Punkte erhielt; denn wäre dies doch der Fall, so müßte jede der Mannschaften auf den Plätzen 1,...,k ebenfalls mehr als 2n-k-1 Punkte erhalten haben, und es ergäben sich für diese Mannschaften insgesamt mehr als k(2n-k-1) Punkte. Die n-k Mannschaften auf den Plätzen k+1, ..., n haben untereinander insgesamt $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt (n-k)(n-k-1) Punkte erhalten. Also muß die Mannschaft auf dem Platz k-1 mindestens n-k-1 Punkte errungen haben; denn wären es weniger, so erst recht für jede der Mannschaften auf den Plätzen k+1,...,n, wenn nur deren Spiele untereinander berücksichtigt werden, und es ergäben sich für diese Spiele insgesamt weniger als (n-k)(n-k-1) Punkte.
Folglich kann in jedem möglichen Turnier die Punktdifferenz zweier beliebiger Mannschaften, die in der Abschlußtabelle die benachbarten Plätze k und k+1 einnehmen, nicht mehr als

$$(2n-k-1) - (n-k-1) = n$$

betragen.
Wenn nun noch ein Beispiel eines Turniers angegeben wird, worin zwei benachbarte Mannschaften mit der Punktdifferenz n auftreten, so ist n als die gesuchte Zahl nachgewiesen.
Ein solches Beispiel erhält man etwa, wenn in einem Turnier die Mannschaft auf Platz 1 gegen alle übrigen Mannschaften gewonnen, dafür also 2n-2 Punkte erhalten hat, und die übrigen Mannschaften untereinander unentschieden gespielt haben, so daß jede dieser Mannschaften für diese n-2 Spiele n-2 Punkte und damit insgesamt in der Abschlußtabelle n-2 Punkte erhielt. Die Punktdifferenz zwischen den Mannschaften auf den Plätzen 1 und 2 beträgt dann nämlich

$$(2n-2) - (n-2) = n \text{ Punkte.}$$

Hinweis zur Korrektur: Möglicherweise liegt es für Schüler nahe, von einem konkreten Fall der Punktdifferenz n auszugehen und den Nachweis zu versuchen, daß bei keiner Änderung der Spielresultate eine größere Differenz entstehen kann. Für einen derartigen Lösungsweg ist der Nachweis entscheidend, daß alle Abänderungsmöglichkeiten erfaßt sind.

201224) Lösung: **11 Punkte**

Angenommen, es gibt ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und m ($m = 3$ oder $m = 4$) paarweise verschiedene ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, so daß $p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_m) = 1$, und eine weitere ganze Zahl x_o, so daß $p(x_o) = 30$ ist.
Dann gilt, wenn man $f(x) = p(x) - 1$ setzt,
$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_m) = 0$, also ist das Polynom $f(x)$ durch die Polynome $x-x_1, x-x_2, \ldots, x-x_m$ teilbar[1], und wenn man die Division ausführt, entsteht

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_m)\, g(x), \qquad (1)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.
Ferner gilt dann

$$p(x_o) = 30$$

also $$f(x_o) = p(x_o) - 1 = 29. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(x_o - x_1)(x_o - x_2) \ldots (x_o - x_m)\, g(x_o) = 29. \qquad (3)$$

Dabei sind die Faktoren $x_o - x_1, x_o - x_2, \ldots, x_o - x_m, g(x_o)$ sämtlich ganzzahlig, sie können also, weil 29 eine Primzahl ist, nur gleich 1, -1, 29, -29 sein. Ferner sind die Faktoren $x_o - x_1, x_o - x_2, \ldots, x_o - x_m$ paarweise verschieden, und es kann nur einer dieser Faktoren den Betrag 29 haben, weil sonst die linke Seite von (3) durch 29^2 teilbar wäre.
Daher können insgesamt höchstens drei solche Faktoren auftreten; d. h., es folgt $m \leqq 3$ und somit zu b) das Ergebnis: Es gibt kein Polynom mit den genannten Eigenschaften.
Umgekehrt kann man (3) für $m = 3$ z. B. dadurch erfüllen, daß man

$$x_0 - x_1 = 1, \quad x_0 - x_2 = -1, \quad x_0 - x_3 = -29$$

erreicht, für x_0 eine beliebige ganze Zahl, etwa $x_0 = 0$, setzt und für $g(x)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten wählt, das die Bedingung $g(x_0) = 1$ erfüllt, etwa das konstante Polynom $g(x) = 1$. Hiermit, d. h. mit $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 29$, wird

---

[1] Hier wird der Satz von der eindeutigen Primzerlegung für Polynome sowie die paarweise Teilerfremdheit der Polynome $x-x_n, \ldots, x-x_m$ ausgenutzt. Dies braucht vom Schüler nicht ausgeführt zu werden.

das in (1) angegebene Polynom

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-29) = x^3 - 29x^2 - x + 29,$$

also

$$p(x) = f(x) + 1 = x^3 - 29x^2 - x + 30. \qquad (4)$$

Für dieses Polynom gilt in der Tat

$$p(-1) = p(1) = p(29) = 1, \quad p(0) = 30.$$

Damit ist zu a) gezeigt: Es gibt ein Polynom mit den genannten Eigenschaften, z. B. das in (4) genannte Polynom.

Hinweis zur Korrektur: Zur Lösung von Aufgabe a) genügt auch ohne heuristische Hinführung die Angabe eines Polynoms, z. B. (4), und der Nachweis, daß es die geforderten Eigenschaften besitzt.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

201221

$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$	1 Punkt
Erkenntnis, daß $a_n \in I_k$ $(k = 1,2,3,4)$ äquivalent ist mit	
$\frac{1}{3} \leqq n \leqq 1$ für $k = 1$,	1 Punkt
$\frac{500}{31} \leqq n \leqq \frac{50}{3}$ für $k = 2$,	1 Punkt
$50 \leqq n \leqq \frac{500}{9}$ für $k = 3$,	1 Punkt
$-0{,}1 \leqq \frac{1}{2n} \leqq 0$ für $k = 4$.	1 Punkt
Erkenntnis, daß	
$a_n \in I_1$ genau für $n = 1$,	1 Punkt
$a_n \in I_2$ für kein n,	1 Punkt
$a_n \in I_3$ genau für $n = 50, 51, \ldots, 55$,	1 Punkt
$a_n \in I_4$ für kein n gilt.	1 Punkt
	9 Punkte

201222

Nachweis, daß k Maßzahl der Hypotenusenlänge ist	4 Punkte
Ermittlung der beiden Werte für k (1)	4 Punkte
Probe	2 Punkte
	10 Punkte

201223

Erkenntnis, daß Mannschaften der Plätze 1 bis k insgesamt nicht mehr als $k(2n-k-1)$ Punkte erhalten haben	2 Punkte
Erkenntnis, daß Mannschaft auf Platz k nicht mehr als $2n-k-1$ Punkte erhielt	2 Punkte
Erkenntnis, daß Mannschaft auf Platz $k+1$ mindestens $n-k-1$ Punkte errungen hat	2 Punkte
Erkenntnis, daß Punktdifferenz zweier Mannschaften auf den Plätzen k und $k+1$ höchstens n sein kann	2 Punkte
Angabe eines Beispiels	2 Punkte
	10 Punkte

201224

Beziehung (1)	3 Punkte
Beziehung (3)	1 Punkt
Erkenntnis, daß $m \leqq 3$ sein muß und daß es im Fall b) kein Polynom mit den geforderten Eigenschaften gibt	3 Punkte
Angabe eines Polynoms $p(x)$ (z. B. (4))	3 Punkte
Nachweis, daß dieses Polynom die geforderten Eigenschaften hat	1 Punkt
	11 Punkte