Krüger

A 10;I

XX. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201041

Beweisen Sie die folgende Aussage! Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und b, für die

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b^2$$

gilt.

201042

Gegeben sei eine Länge r_1. Konstruieren Sie ein Trapez ABCD mit $\overline{CD} < \overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, daß sie einander von außen berühren und daß k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt! Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

<u>201043A</u>

Ermitteln Sie alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \cdot \log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \cdot \log_y (5 - \sqrt{24}), \tag{1}$$

$$y - x = 2 \tag{2}$$

<u>201043B</u>

Beweisen Sie, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl

$$625 + 4 \cdot (9^{2n})$$

eine Primzahl sein kann!

XX. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

201044

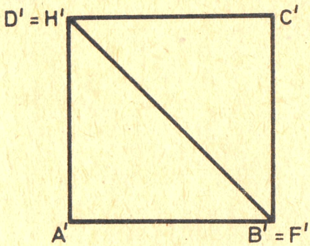


Abb. A 1044

Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den in Abb. A 1044 dargestellten Grundriß haben. (A'B'C'D' ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.) Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrißebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D. Jede Kante des Körpers soll in Abb. A 1044 sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrißebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.
Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60^\circ$, $q = \frac{1}{2}$) dar! Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

201045

Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 5$$

und für alle $n = 1,2,\ldots,999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1,2,\ldots,1000$ die Ungleichung

$$4 \leqq x_n \leqq 5$$

gilt!

A 10;II

201046

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c, \qquad (1)$$

$$y < x + c \quad , \qquad (2)$$

$$y < -2x + 1 \quad . \qquad (3)$$

XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

201041) Lösung: 6 Punkte

1. Lösungsweg:

(I) Für $n = 2$ und $n = 3$ ist z. B. aus
$$3^2 + 4^2 = 5^2,\ 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
die behauptete Existenz von $a_1, \ldots, a_n$, b mit der geforderten Eigenschaft ersichtlich.

(II) Ist $n \geqq 4$ eine Quadratzahl $n = m^2$ mit $m \geqq 2$, so ist z. B. eine Summe aus n Summanden 5^2 gleich
$$5^2 + \ldots + 5^2 = (5m)^2$$
und zeigt die behauptete Existenz der $a_1, \ldots, a_n$, b.

(III) Ersetzt man hierin k der Summanden 5^2 durch $3^2 + 4^2$ (wobei k eine der Zahlen $1, \ldots, n$ ist), so erhält man jeweils für $n = m^2 + k$ die behauptete Existenz der $a_1, \ldots, a_n$, b.
Die größte hiermit (zu je einem $m \geqq 2$) erreichbare Anzahl von Summanden ist $2m^2 \geqq m^2 + 2m = (m + 1)^2 - 1$. Damit ist also auch für jedes n zwischen m^2 und der nächsten Quadratzahl $(m + 1)^2$ die Behauptung bewiesen.
Aus (I), (II), (III) folgt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$.

2. Lösungsweg:

(I) Die Aussage für $n = 2$ ergibt sich wie oben.

(II) Wenn die Aussage für eine natürliche Zahl $n = k \geqq 2$ gilt, so folgt: Es gibt natürliche Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k$, d mit
$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_k^2 = d^2.$$
Daraus ergibt sich
$$(3c_1)^2 + (4c_1)^2 + (5c_2)^2 + \ldots + (5c_k)^2$$
$$= 5^2(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_k^2) = (5d)^2,$$
also haben dann die natürlichen Zahlen
$$a_1 = 3c_1,\ a_2 = 4c_1,\ a_i = 5c_{i-1}\ (i = 3, \ldots, k+1) \text{ und } b = 5d$$

die Eigenschaft $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2 = b^2$.
Somit trifft die zu beweisende Aussage auch für $n = k+1$ zu.
Mit (I) und (II) ist die Aussage für alle natürlichen $n \geqq 2$ bewiesen.

Korrekturhinweis:
Es muß zum Ausdruck gebracht sein, wie ein Beweis für alle $n \geqq 2$ geführt werden kann. Das kann auch in verbaler Beschreibung, ohne formale Gestaltung als Schluß von k auf k+1 geschehen; jedoch eine lediglich etwa als "usw." auftretende Wendung ist nicht ausreichend.

201042) Lösung: 8 Punkte

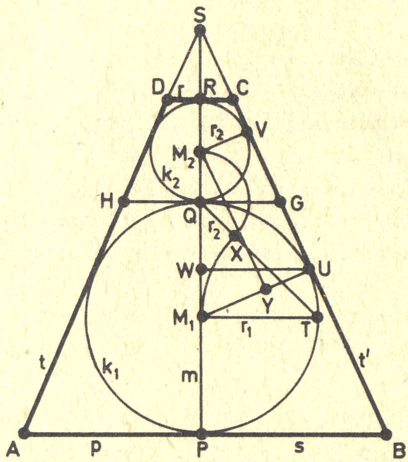


Abb. L 1042

I. Angenommen, ein Trapez ABCD habe zusammen mit zwei Kreisen k_1, k_2 die verlangten Eigenschaften. Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2, der Radius von k_2 sei r_2. Die Seiten AD und BC sind nicht parallel zueinander, da sonst ABCD wegen $\overline{AD} = \overline{BC}$ ein Parallelogramm wäre, im Widerspruch zu $\overline{CD} < \overline{AB}$. Also gilt $AB \parallel CD$, und das Trapez ist mit $\overline{AD} = \overline{BC}$ gleichschenklig. Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich wegen $\overline{CD} < \overline{AB}$ in einem Punkt S schneiden, so liegen M_1, M_2 auf einer Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle$ ASB, nämlich auf der gemeinsamen Mittelsenkrechten m der Seiten AB und CD. Diese Seiten werden also von k_1 bzw. k_2 in ihren Mittelpunkten P bzw. R berührt. Ferner liegt auch der Berührungspunkt Q von k_1, k_2 auf m; die Parallele durch Q zu AB und CD ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1, k_2; sie schneide AD in H und BC in G.

Das Trapez HGCD, dessen vier Seiten von k_2 berührt werden, geht demnach durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez ABGH über, dessen vier Seiten von k_1 berührt werden, und für das Verhältnis

$$x = r_2 : r_1$$

sowie für $a = \overline{AB}$, $b = \overline{HG}$, $c = \overline{DC}$ gilt $x = \overline{DC} : \overline{HG} = \overline{HG} : \overline{AB}$, also $b = ax$, $c = bx = ax^2$. Sind ferner U, V die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC, so folgt aus dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte $\overline{BP} = \overline{BU}$, $\overline{GQ} = \overline{GU} = \overline{GV}$, $\overline{CR} = \overline{CV}$. Also ist

$$a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BU} + \overline{GU} + \overline{GV} + \overline{CV} = \overline{BP} + 2\,\overline{GQ} + \overline{CR}$$

$$= \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{a}{2}\,(1 + 2x + x^2),$$

$$2 = 1 + 2x + x^2.$$

Diese Gleichung wird nur von $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ erfüllt, von denen wegen $x > 0$ nur

$$x = \sqrt{2} - 1, \text{ also } r_2 = r_1\,(\sqrt{2} - 1)$$

verbleibt. Also kann ein Trapez ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere einen Kreis k_1 mit dem Radius r_1. Sein Mittelpunkt sei M_1, zwei aufeinander senkrechte Radien seien M_1Q und M_1T.
(2) Der Kreis um T mit r_1 schneidet TQ in X.
(3) Man verlängere M_1Q über Q hinaus um $r_2 = \overline{QX}$; der erhaltene Punkt sei M_2. Man konstruiere den Kreis um M_2 mit r_2.
(4) Man konstruiere die gemeinsamen äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2.
(5) Die Gerade m durch M_1, M_2 schneidet k_1 und k_2 außer in Q in P bzw. R; man konstruiere die Senkrechten p, r durch P, R auf m. Durch t, t', p und r wird das gesuchte Trapez ABCD gebildet.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD} = \overline{BC}$, und k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2 < r_1$ gilt auch $\overline{CD} < \overline{AB}$, und man kann wie in I. herleiten, daß mit $x = r_2 : r_1$ die Gleichung

$\overline{BC} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$ gilt. Da nach Konstruktion $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $1 + 2x + x^2 = 2$, und es folgt $\overline{BC} = a = \overline{AB}$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, die Konstruktionsschritte (2) bis (5) sind danach eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

1. Nach Herleitung von $x = \sqrt{2} - 1$ kann man $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ verwenden, um $\overline{AB} - \overline{DC} = a(1 - x^2) = 2a(\sqrt{2} - 1)$ herzuleiten. Hiernach ist $\overline{\sphericalangle ABC}$ die Größe eines Basiswinkels in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem sich Schenkellänge zu Basislänge wie $1:2(\sqrt{2} - 1)$ verhalten. Daraus ergibt sich eine Konstruktion dieser Winkelgröße. M_1 liegt dann auf der Winkelhalbierenden und auf einer Parallelen zu einem Schenkel im Abstand r_1. Danach ist die Figur leicht zu vervollständigen.

2. Die Ermittlung (I.) von $r_2 : r_1$ ist z. B. auch folgendermaßen möglich: Das Lot von U auf PR sei UW, das Lot von M_2 auf M_1U sei M_2Y. Wegen $\overline{BU} = \frac{a}{2}$ ist U Mittelpunkt von BC, also $\overline{PW} = \frac{1}{2}(\overline{PQ} + \overline{QR}) = r_1 + r_2$, also $\overline{M_1W} = r_2$. Ferner ist $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$ und YUVM ein Rechteck, also $\overline{M_1Y} = r_1 - r_2$. Aus $\triangle M_1UW \sim \triangle M_1M_2Y$ folgt daher

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2},\quad r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 = 0,\ \text{also}\ r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1).$$

3. Wegen $\overline{\sphericalangle PM_1U} + \overline{\sphericalangle UM_1Q} = 180^\circ$ und $\triangle BM_1P \cong \triangle BM_1U$, $\triangle GM_1U \cong \triangle GM_1Q$ gilt $\overline{\sphericalangle BM_1U} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle GM_1U} = \overline{\sphericalangle M_1GU}$. Hieraus und aus entsprechenden Aussagen im Trapez HGCD erhält man

$$\triangle BM_1P \cong \triangle BM_1U \sim \triangle M_1GU \cong \triangle M_1GQ \sim \triangle GM_2Q \cong \triangle GM_2V \sim \triangle M_2CV \cong \triangle M_2CR.$$

Hiermit kann man z. B. der Reihe nach $\overline{GU} = \overline{GQ} = \overline{GV}$ und $\overline{CV}$ durch r_1 und $s = \overline{BP} = \overline{BU}$ ausdrücken und erhält aus $\overline{BC} = 2s$ eine Gleichung zwischen r_1 und s, die auf $s = r_1\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ führt.

Zu allen derartigen Möglichkeiten von (I.) ist jeweils (III.) als Umkehrung durchzuführen.

201043A) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, ein Paar (x;y) reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$ erfülle (1) und (2).

Wegen $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-\sqrt{24}$ folgt dann

$$x^2 \cdot \log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Wegen $\sqrt{3}-\sqrt{2} \neq 1$ ist $\log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \neq 0$, also folgt

$$x^2 = 4.$$

Aus (2) und $y > 0$ folgt ferner $x = y - 2 > -2$. Daher muß $x = 2$ sein, nach (2) ergibt sich $y = 2 + x = 4$.

Also kann nur das Paar $(x;y) = (2;4)$ die Gleichungen (1), (2) erfüllen.

Wegen $2 \cdot \log_4(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5-\sqrt{24})$ und $4 - 2 = 2$ erfüllt es diese Gleichungen tatsächlich.

Daher ist genau das Paar (2;4) das gesuchte.

Hinweis:

Aus (1) kann man $\log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x^2} = \log_y(5-\sqrt{24})^2$,

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x^2} = (5-\sqrt{24})^2,\quad x^2 = \log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(5-\sqrt{24})^2$$

$$\left(= \frac{2 \cdot \lg(5-\sqrt{24})}{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right)$$

herleiten.

Dies lediglich mit dem näherungsweisen Ausrechnen $x^2 \approx 4$ fortzusetzen, genügt nicht, da ja, falls der genaue Wert $x^2 < 4$ wäre, auch die negative Lösung x auf ein $y = 2 + x > 0$ führen würde.

201043B) Lösung: 6 Punkte

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\begin{aligned}
625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n}\\
&= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n}\\
&= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n)\\
&= ((5+3^n)^2 + 3^{2n})((5-3^n)^2 + 3^{2n})
\end{aligned}$$

sowie $(5+3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5+3^0)^2 + 3^0 > 1$ und

$5 \neq 3^n$, also $(5-3^n)^2 > 0$, $(5-3^n)^2 + 3^{2n} > 0 + 3^0 = 1$.

Also ist $625 + 4 \cdot (9^{2n})$ in zwei ganzzahlige Faktoren > 1 zerlegbar und daher keine Primzahl.

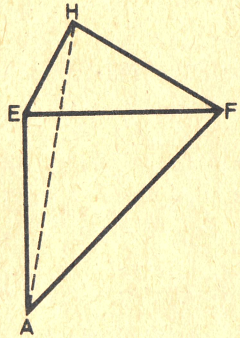
L 10;II XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

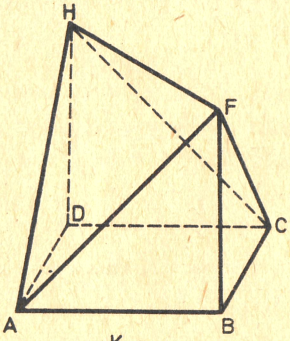
4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

201044) Lösung: 6 Punkte





K$_1$

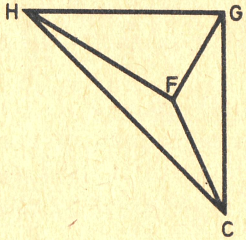
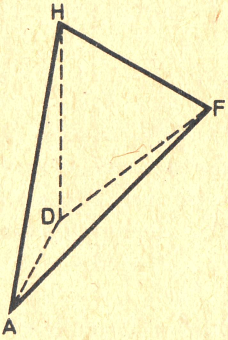
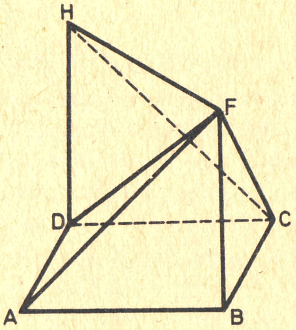


Abb. L 1044a





K$_2$

Abb. L 1044b

Abb. L 1044a zeigt einen Körper K_1, der die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Man kann ihn dadurch entstanden denken, daß von einem Würfel ABCDEFGH die Pyramiden AFHE und CFHG abgeschnitten wurden[1].

Abb. L 1044b zeigt einen Körper K_2, der ebenfalls die Forderungen der Aufgabe

---

1 Die abgeschnittenen Pyramiden brauchen vom Schüler nicht gezeichnet zu werden.

erfüllt. Man kann ihn dadurch entstanden denken, daß aus K_1 die Pyramide AFHD herausgeschnitten wurde[1].

Für jede der genannten Pyramiden kann ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge a als Grundfläche aufgefaßt werden; die zugehörige Höhe hat dann die Länge a. Daher hat jede dieser drei Pyramiden das Volumen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3$. Somit hat K_1 das Volumen $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{2}{3} a^3$ und K_2 das Volumen $a^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{2} a^3$.

Hinweis: Außer diesen beiden sind noch weitere Lösungen möglich.

201045) Lösung: 7 Punkte

Nach der ersten Festsetzung ist $x_1 \geqq 4$. Hat man für eine der Zahlen $n = 1,2,\ldots,999$ schon nachgewiesen, daß $x_n \geqq 4$ ist, so erhält man $(x_n - 4)^2 \geqq 0$, also $x_n^2 + 16 \geqq 8x_n$. Wegen $2x_n$ $(\geqq 8) > 0$ folgt hieraus $\frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \geqq 4$, d. h. nach der zweiten Festsetzung $x_{n+1} \geqq 4$.

Auf diese Weise gewinnt man der Reihe nach die Ungleichungen $x_2 \geqq 4$; $x_3 \geqq 4$; ... ; $x_{1000} \geqq 4$.

Ferner[2] gilt $x_1 \leqq 5$, und hat man für eine der Zahlen $n = 1,2,\ldots,999$ schon $4 \leqq x_n \leqq 5$, so folgt $-1 \leqq x_n - 5 \leqq 0$ und daraus $(x_n - 5)^2 \leqq 1$, $(x_n - 5)^2 - 9 \leqq -8 \leqq 0$, also $x_n^2 + 16 \leqq 10\, x_n$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \leqq 5.$$

Auf diese Weise gewinnt man auch $x_2 \leqq 5$; $x_3 \leqq 5$; ...; $x_{1000} \leqq 5$.

Korrekturhinweise: Durch Berechnung lediglich von Näherungswerten (ohne Berücksichtigung der Rundungsfehler) kann der geforderte Beweis nicht geführt werden. Ferner gilt sinngemäß auch der Hinweis zu 201041.

---

1 Die abgeschnittenen Pyramiden brauchen vom Schüler nicht gezeichnet zu werden.

2 Andere Fortsetzungsmöglichkeit: Aus $x_n^2 + 16 \leqq 2x_n^2$ schließt man $x_{n+1} \leqq x_n$, also $x_{1000} \leqq x_{999} \leqq \ldots \leqq x_2 \leqq x_1 = 5$.

<u>201046) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

<u>1. Lösungsweg:</u> Angenommen, für ein reelles c habe (1), (2), (3) eine Lösung $(x;y)$. Aus (1) und (2) folgt dann $x \neq 0$, da sich für $x = 0$ der Widerspruch $y > c$, $y < c$ ergäbe.
Aus (1) und (3) folgt ferner $x^2 - 2x + c < y < - 2x + 1$, also $c < 1 - x^2$, wegen $x \neq 0$ also $c < 1$.
Daher kann das System (1), (2), (3) nur für $c < 1$ eine Lösung haben.
Es hat für jedes $c < 1$ eine Lösung, z. B. eine mit $y = c$. Für diesen Wert ist das System nämlich äquivalent zu

$$x^2 - 2x < 0, \qquad (4)$$
$$x > 0, \qquad (5)$$
$$- 2x + 1 > c; \qquad (6)$$

(4) und (5) sind äquivalent mit

$$0 < x < 2 \qquad (7)$$

und (6) ist äquivalent mit

$$x < \frac{1 - c}{2}. \qquad (8)$$

Wegen $c < 1$ gilt $\frac{1 - c}{2} > 0$; also sind (7), (8) durch reelle x erfüllbar.
Die gesuchten Zahlen sind folglich alle Zahlen $c < 1$.

<u>2. Lösungsweg:</u> Stellt man die Funktionen

$$y = x^2 - 2x + c, \qquad (1')$$
$$y = x + c \quad , \qquad (2')$$
$$y = - 2x + 1 \qquad (3')$$

graphisch dar, so besteht die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (1), (2), (3) aus den Koordinatenpaaren $(x;y)$ aller derjenigen Punkte, die sowohl oberhalb der Parabel (1') als auch unterhalb der Geraden (2') und unterhalb der Geraden (3') liegen. Nun haben (1') und (2') stets die Schnittpunkte $(0;c)$ und $(3;3+c)$.
Ist $c < 1$ (Abb. L 1046a), so liegt der Schnittpunkt $(0;c)$ unterhalb der Geraden (3'), und daher enthält auch das oberhalb (1') und unterhalb (2') gelegene Flächenstück Punkte unterhalb (3'); d. h., im Falle $c < 1$ ist die Lösungsmenge von (1), (2), (3) nicht leer.
Ist $c = 1$, so folgt aus (1') und (3'), daß $x^2 = 0$, also $x = 0$, $y = 1$ sein muß. Ist $c > 1$, so folgt aus (1') und (3') der Wider-

$x^2 = 1 - c < 0$. Also haben (1') und (3') im Fall $c \geqq 1$ höchstens den Punkt (0;c) gemeinsam (Abb. L 1046b, c). Da die Parabel (1') von unten konvex ist, also ganz oberhalb jeder nicht zur y-Achse parallelen Geraden verläuft, mit der sie höchstens einen Punkt gemeinsam hat, gibt es somit keinen Punkt, der sowohl oberhalb (1') als auch unterhalb (3') läge. Daher ist im Falle $c \geqq 1$ die Lösungsmenge von (1), (2), (3) leer.

Die gesuchten Zahlen sind folglich alle Zahlen $c < 1$.

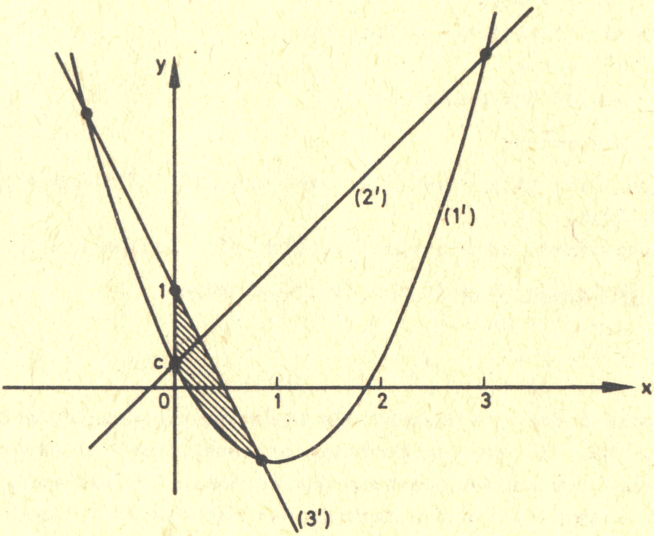


Abb. L 1046a

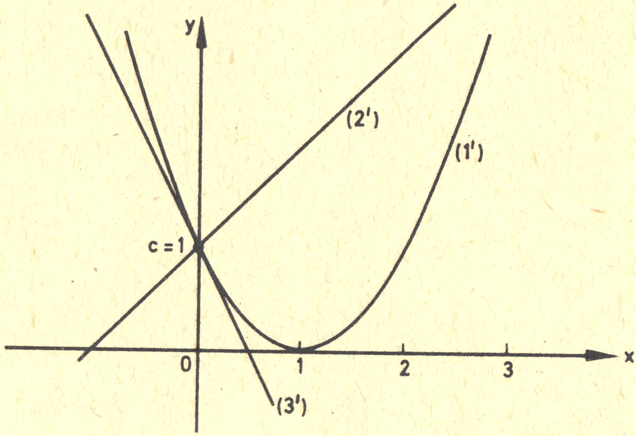


Abb. L 1046b

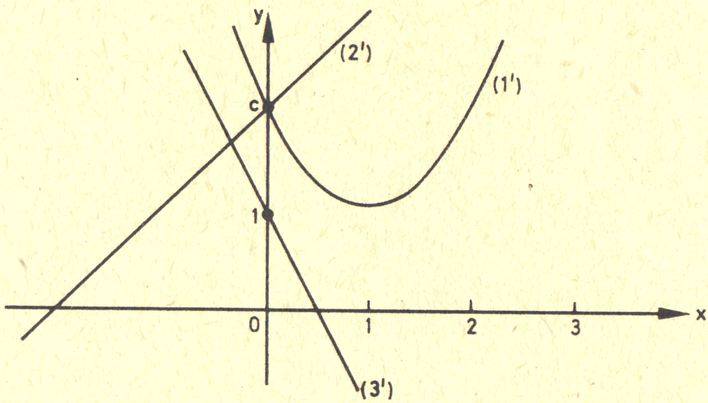


Abb. L 1046c