A 10;I

XX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201031

In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:

(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden "Preisträger" genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.

Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

201032

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20, \qquad (1)$$
$$y - x < 4, \qquad (2)$$
$$y - ax \geq 6. \qquad (3)$$

A 10;I

<u>201033</u>

Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε . Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat ABCD gibt, für das

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\text{ cm},\ \overline{PB} = \sqrt{5}\text{ cm},\ \overline{PC} = \sqrt{8}\text{ cm}$$

gilt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

XX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

201034

Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!
Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

201035

Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 3$$

und für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung

$$x_n > 2$$

gilt!

201036

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle$ ABC, $\sphericalangle$ BCA die Bedingungen

$$a = 8 \text{ cm}, \; b + c = 12 \text{ cm}, \; \beta + \gamma = 100^\circ$$

erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, daß alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!

A 10;II

<u>Hinweis:</u> In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, A'B'C' als "einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgend einer anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

201031) Lösung: **6 Punkte**

Nach (3) und (4) war genau einer der Preisträger nicht Mitglied einer AG Mathematik; nach (6) war dies ein Junge; die übrigen Jungen, die Preisträger waren, gehörten also einer AG Mathematik an.

Von den nach (1) insgesamt 25 teilnehmenden Jungen waren nach (2) genau 10 nicht Mitglied einer AG Mathematik. Genau einer dieser 10 Jungen war, wie soeben ermittelt wurde, Preisträger.
Also ist 9 die gesuchte Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren, noch einer AG Mathematik angehörten.

Hinweis: Das folgende Diagramm zeigt die vollständige Klassifizierung bezüglich der Merkmale Ju/Mä, AG/nicht AG, Preistr./nicht Preistr.
Zugleich ist daraus die Existenz einer Klassifizierung mit den Eigenschaften (1) bis (6) ersichtlich (die auch aus dem einleitenden Aufgabentext geschlossen werden kann). Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt.

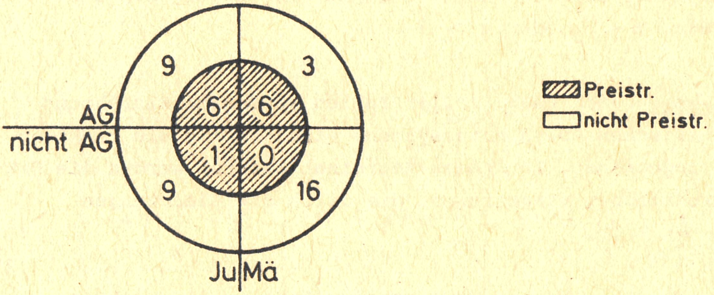

Abb. L 1031

201032) Lösung: 7 Punkte

Ist $a > 1$, so ist für negative Zahlen x wegen $a \cdot (-x) > -x$ stets die linke Seite $y - ax$ von (3) größer als die linke Seite $y - x$ von (2). Den Unterschied $(y-ax) - (y-x) = (a-1)(-x)$ kann man z. B. größer als 6 machen, etwa indem man $(a-1)(-x) = 7$ durch $x = \frac{7}{a-1}$ ersetzt. Dann lassen sich (2) und (3) so erfüllen, daß ihre linken Seiten 0 und 7 lauten, nämlich mit $y = x = -\frac{7}{a-1}$. Diese beiden negativen Zahlen erfüllen auch (1). Also hat das Ungleichungssystem (1), (2), (3) im Fall $a > 1$ eine Lösung (x,y).

Sei nun $0 < a \leqq 1$. Wenn (1), (2), (3) eine Lösung (x,y) hat, so folgt durch Addition von (1) und (2) einerseits $3y < 24$, also

$$y < 8. \qquad (4)$$

Andererseits folgt aus (2), also $y - 4 < x$, und (3)

$$ay - 4a < ax \leqq y - 6,$$

$$y(1 - a) > 6 - 4a.$$

Wegen $1 - a \geqq 0$ und (4) folgt erst recht $8(1 - a) > 6 - 4a$, also $a < \frac{1}{2}$. Damit ist bewiesen, daß das System (1), (2), (3) für alle a mit $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ keine Lösung (x,y) haben kann.

Im Fall $a < \frac{1}{2}$ (wobei sogar sogleich auch alle $a \leqq 0$ mit betrachtet werden können) kann man durch geeignete Wahl von x erreichen, daß y z. B. durch (2) nicht stärker eingeschränkt wird als durch (4); denn wählt man $x = 4$, so ist (2) - und, wie man nachrechnet, auch (1) - äquivalent zu $y < 8$. Für diese Wahl $x = 4$ besagt (3) nun $y \geqq 6 + 4a$, und auch dies ist durch ein $y < 8$ erfüllbar, da $6 + 4a < 6 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$ gilt. (Geeignet ist z. B. $y = 7 + 2a$).

Daher sind die gesuchten Zahlen a genau diejenigen, für die

$$\text{entweder } a < \frac{1}{2} \text{ oder } a > 1$$

gilt.

2. Lösungsweg: Jedem Paar reeller Zahlen wird nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems eineindeutig ein Punkt in der Ebene zugeordnet. In dieses Koordinatensystem werden die Graphen der Funktionen eingetragen, die durch die Gleichungen

$$y = -\frac{1}{2}x + 10, \qquad (1')$$

$$y = x + 4 \qquad (2')$$

bestimmt sind. Alle Paare (x;y) reeller Zahlen, die Punkten in dem schräg schraffierten Gebiet entsprechen (mit Ausschluß der beiden Graphen selbst), erfüllen dann die Ungleichungen (1) und (2).

Die Koordinaten $(x;y)$ des Schnittpunktes S beider Geraden ergeben sich durch Auflösen des Gleichungssystems (1'), (2'); man erhält $x = 4$, $y = 8$.

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung

$$y = ax + 6 \qquad (3')$$

geht genau dann durch S, wenn $8 = 4a + 6$, d. h. $a = \frac{1}{2}$ ist.

Für alle $a < \frac{1}{2}$ verläuft die entsprechende Gerade flacher, also z. T. durch das schräg schraffierte Gebiet, d. h., in diesem Falle existieren stets Punkte und somit Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die (1) bis (3) erfüllen (s. das senkrecht schraffierte Gebiet oberhalb der mit "$a < \frac{1}{2}$" gekennzeichneten Geraden.).

Für alle a mit $\frac{1}{2} < a < 1$ liegt der jeweilige Schnittpunkt von (2') mit (3') oberhalb des Graphen von $y = 8$. Für $a = 1$ verlaufen die Graphen von (2') und (3') parallel. In diesen Fällen gibt es keine Punkte, die oberhalb des Graphen von (3') oder auf ihm liegen <u>und</u> der schräg schraffierten Fläche angehören, und somit keine Lösungen des Ungleichungssystems.

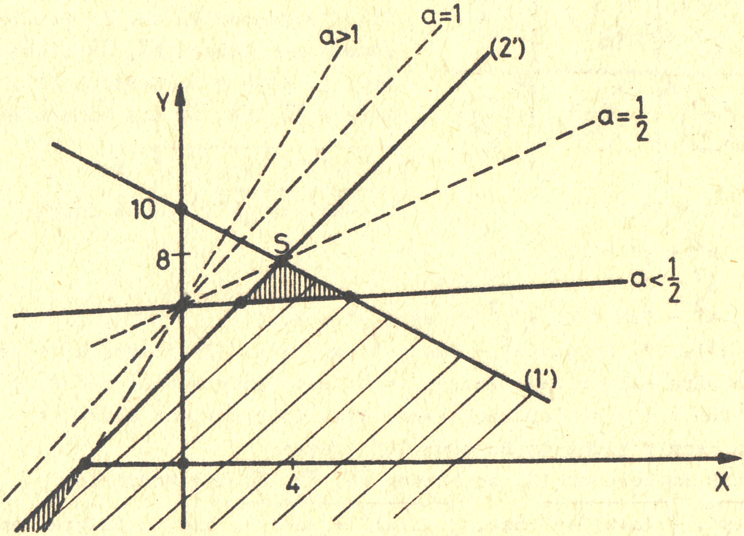

Abb. L 1032

Für $a > 1$ schneiden (2') und (3') einander unterhalb S. Somit verläuft ein Teil der entsprechenden Geraden durch das schräg schraffierte Gebiet, und somit existieren in diesem Falle Punkte, also auch Paare reeller Zahlen $(x;y)$, die den Bedingungen genügen (s. das senkrecht schraffierte Gebiet oberhalb der mit "$a > 1$" gekennzeichneten Geraden.).
Damit besitzt das Ungleichungssystem (1) bis (3) genau dann mindestens eine Lösung, wenn entweder $a < \frac{1}{2}$ oder $a > 1$ ist.

201033) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, ABCD sei ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften; die Maßzahl seiner in Zentimeter gemessenen Seitenlänge sei a. Durch die Quadratseiten und ihre Verlängerungen wird die Ebene ε so in neun Bereiche I, II, ..., IX zerlegt, wie Abb. L 1033 a zeigt.

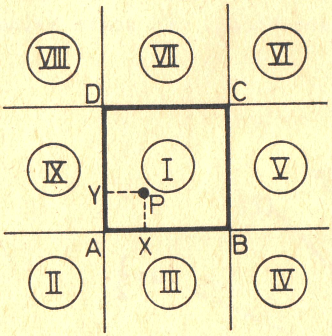

Abb. L 1033a

Wegen $\overline{PA} < \overline{PB}$ kann P in keinem der Bereiche IV, V, VI liegen, wegen $\overline{PB} < \overline{PC}$ auch in keinem der Bereiche VII, VIII.
Die Lote von P auf die Geraden durch A, B bzw. durch A, D seien PX bzw. PY; die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen $\overline{AX}$, $\overline{AY}$ seien x bzw. y. Läge P im Bereich III, so hätten $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ die Maßzahlen $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{(a-x)^2+y^2}$ bzw. $\sqrt{(a-x)^2+(a+y)^2}$, und es folgte

$$x^2 + y^2 = 2, \qquad (1)$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = 5, \qquad (2)$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + y^2 + 2ay + y^2 = 8. \qquad (3)$$

Aus (1), (2) folgte $a^2 - 2ax = 3$, aus (2), (3) folgte $a^2 + 2ay = 3$.
Also wäre $-2ax = 2ay$, $2a(x+y) = 0$, was wegen $a > 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ nur für $x = y = 0$ möglich wäre; dies widerspricht aber (1).
Also kann P nicht im Bereich III liegen.
Läge P im Bereich IX, so hätten $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ die Maßzahlen $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{(a+x)^2+y^2}$ bzw. $\sqrt{(a+x)^2 + (a-y)^2}$, und es folgten entsprechend Gleichungen, aus denen man $a^2 + 2ax = 3$ sowie

$a^2 - 2ay = 3$ erhielte, woraus sich wieder ein Widerspruch zu (1) ergibt. Daher kann P auch nicht im Bereich IX liegen.

Also kann P höchstens im Bereich I oder im Bereich II liegen. Im ersten Fall folgt

$$x^2 + y^2 = 2,$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = 5,$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - 2ay + y^2 = 8,$$

also $a^2 - 2ax = 3$, $a^2 - 2ay = 3$, $2a(x-y) = 0$, wegen $a > 0$ also $x = y$ und daher $2x^2 = 2$, wegen $x \geq 0$ somit $x = y = 1$, $a^2 - 2a.1 = 3$, $a = 1 \pm 2$, wegen $a > 0$ also $a = 3$.

Im zweiten Fall folgt

$$x^2 + y^2 = 2,$$
$$a^2 + 2ax + x^2 + y^2 = 5,$$
$$a^2 + 2ax + x^2 + a^2 + 2ay + y^2 = 8$$

und daraus entsprechend $x = y$, $x = y = 1$, $a^2 + 2a.1 = 3$, $a = -1 \pm 2$, wegen $a > 0$ also $a = 1$.

Daher kann ein Quadrat nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn es entweder die Seitenlänge 3 cm hat und so liegt, wie Abb. L 1033b zeigt, oder die Seitenlänge 1 cm hat und so liegt, wie Abb. L 1033c zeigt.

In der Tat führen diese Lagemöglichkeiten (in beiden Fällen) auf

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\text{ cm},\quad \overline{PB} = \sqrt{5}\text{ cm und } \overline{PC} = \sqrt{8}\text{ cm}.$$

Daher gibt es Quadrate mit der geforderten Eigenschaft, und jedes derartige Quadrat hat die Seitenlänge 3 cm oder die Seitenlänge 1 cm.

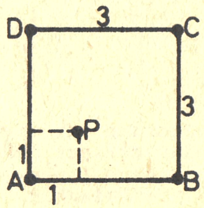

Abb. L 1033 b

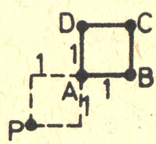

Abb. L 1033c

2. Lösungsweg:

Wenn ein Quadrat ABCD die geforderte Eigenschaft hat, so kann man die Punkte P und C so in ein Gitter aus Quadraten der Seitenlänge 1 cm legen, wie die Abb. L 1033d zeigt[1].

Ferner liegt dann A auf dem in Abb. L 1033d angegebenen Kreis k_1 und B auf dem Kreis k_2. Da ABCD ein Quadrat ist, führt eine Drehung um 45° mit dem Drehpunkt C und eine anschließende ähnliche Verkleinerung[1] mit dem Ähnlichkeitszentrum C und dem Verkürzungsfaktor $1 : \sqrt{2}$ den Punkt A in den Punkt B über. Also liegt B auch auf demjenigen Kreis k_1', der aus k_1 durch das Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen entsteht. Sein Mittelpunkt ist der in Abb. L 1033d angegebene Gitterpunkt P', sein Radius ist 1 cm. Daher haben k_2 und k_1' genau die Gitterpunkte B_1 und B_2 gemeinsam, und es können nur Quadrate die geforderte Eigenschaft haben, die zu P entweder die durch $A_1B_1C\,D_1$ oder die durch $A_2B_2C\,D_2$ angegebene Lage haben.

Umgekehrt gilt für jede dieser beiden Lagemöglichkeiten

$\overline{PA} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ cm $= \sqrt{2}$ cm, $\overline{PB} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ cm $= \sqrt{5}$ cm,

$\overline{PC} = \sqrt{2^2 + 2^2}$ cm $= \sqrt{8}$ cm.

Daher gibt es Quadrate mit der geforderten Eigenschaft, und jedes derartige Quadrat hat die Seitenlänge 3 cm oder die Seitenlänge 1 cm.

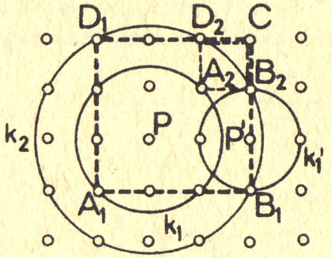

Abb. L 1033d

---

1 Hinweis: Der Satz, daß bei ähnlicher Verkleinerung aus einem Kreis wieder ein Kreis entsteht, kann entweder zitiert oder dadurch bewiesen werden, daß man für variable Punkte $A \neq A_1, A_2$ auf k_1 und ihre Bildpunkte B (Abb. L 1033d) die Aussagen

$\sphericalangle B_iCB = \sphericalangle A_iCA$, $\overline{B_iC} : \overline{BC} = \overline{A_iC} : \overline{AC}$, $\Delta B_iCB \sim \Delta A_iCA$ $(i = 1,2)$;

$\sphericalangle B_2B_1B = \sphericalangle A_2A_1A$, $\sphericalangle B_1B_2B = \sphericalangle A_1A_2A$; $\sphericalangle B_1BB_2 = \sphericalangle A_1AA_2 = 90^\circ$

herleitet.

L 10;II XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>201034) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Ein Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn a und h die Gleichung

$$\frac{1}{3}a^2h = a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} \qquad (1)$$

erfüllen und x die Zahl auf beiden Seiten von (1) ist; denn die linke Seite von (1) ist die Maßzahl des Volumens, die rechte Seite von (1) die Maßzahl des Oberflächeninhaltes einer Pyramide mit den angegebenen a,h.

(I) Angenommen, für von Null verschiedene natürliche Zahlen a,h gelte (1). Wegen $a \neq 0$ folgt dann

$$ah - 3a = 3\sqrt{a^2 + 4h^2},$$
$$a^2h^2 - 6a^2h + 9a^2 = 9a^2 + 36h^2,$$

wegen $h \neq 0$ also

$$a^2(h - 6) = 36h.$$

Hiernach ist $y = h-6$ eine positive natürliche Zahl, für die

$$a^2y = 36(y + 6), \qquad (2)$$
$$(a^2 - 36)y = 6^3$$

gilt. Somit ist y ein Teiler von 6^3 und hat nach (2) die Eigenschaft, daß $a^2 = \frac{36(y + 6)}{y}$ eine Quadratzahl ist. Aus der Tabelle

y	y+6
1	$7 = 7$
2	$8 = 2^3$
4	$10 = 2\cdot5$
8	$14 = 2\cdot7$

y	y+6
3	$9 = 3^2$
6	$12 = 2^2\cdot3$
12	$18 = 2\cdot3^2$
24	$30 = 2\cdot3\cdot5$

y	y+6
9	$15 = 3\cdot5$
18	$24 = 2^3\cdot3$
36	$42 = 2\cdot3\cdot7$
72	$78 = 2\cdot3\cdot13$

y	y+6
27	$33 = 3\cdot11$
54	$60 = 2^2\cdot3\cdot5$
108	$114 = 2\cdot3\cdot19$
216	$222 = 2\cdot3\cdot37$

geht hervor, daß für alle Teiler y von 6^3 außer für y = 2, 3, 6, 12, 18 in der Zahl y+6 ein von 2 und 3 verschiedener Primfaktor genau einmal auftritt, so daß $\frac{36(y+6)}{y}$ keine Quadratzahl sein kann. In den verbleibenden Fällen ist, wie die Tabelle

y	2	3	6	12	18
$36\,\frac{y+6}{y}$	$36\cdot 4=144$	$36\cdot 3=108$	$36\cdot 2=72$	$36\cdot\frac{3}{2}=54$	$36\cdot\frac{4}{3}=48$

zeigt, $\frac{36(y+6)}{y}$ nur für $y = 2$ eine Quadratzahl a^2. Daher kann (1) nur für $h = 8$, $a = 12$ erfüllt sein.

(II) Tatsächlich erhält man für diese Werte

$$\frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\cdot 12^2\cdot 8 = 384,$$

$$a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = 12^2 + 2\cdot 12\sqrt{\frac{12^2}{4} + 8^2} = 144 + 24\sqrt{36+64} = 384.$$

Somit hat genau das Tripel (12; 8; 384) die verlangte Eigenschaft.

201035) Lösung: 7 Punkte

Nach der ersten Festsetzung ist $x_1 > 2$. Hat man für eine der Zahlen $n = 1, 2, \ldots, 999$ schon nachgewiesen, daß $x_n > 2$ ist, so erhält man $(x_n - 2)^2 > 0$, also $x_n^2 + 4 > 4x_n$. Wegen $2x_n > (4 >)\ 0$ folgt hieraus

$$\frac{x_n^2 + 4}{2x_n} > 2, \text{ d. h. nach der zweiten Festsetzung } x_{n+1} > 2.$$

Auf diese Weise gewinnt man der Reihe nach die zu beweisenden Ungleichungen $x_2 > 2$, $x_3 > 2$, $\ldots$, $x_{1000} > 2$.

Korrekturhinweise:

Durch Berechnung lediglich von Näherungswerten (ohne Berücksichtigung der Rundungsfehler) kann der geforderte Beweis nicht geführt werden. Auf Rechnungen wie etwa $x_2 \approx 2{,}1666666667$, $x_3 \approx 2{,}006410256$, $x_4 \approx 2{,}000010240$, $x_n \approx 2$ für $n \geqq 5$ ist folglich maximal 1 Punkt zu vergeben, da sie höchstens im Sinne eines grob orientierenden Vorüberlegungsschrittes Teil eines zum Ziel führenden Lösungsweges sein können.

Werden in einer Schülerlösung einige Ungleichungen wie etwa $x_1 > 2$, $x_2 > 2$, $x_3 > 2$ korrekt bewiesen, so ist (zur Bewertung als vollständige Lösung) einzuschätzen, ob zum Ausdruck gebracht wurde, wie ein Beweis für jede der zu zeigenden Ungleichungen $x_n > 2$ geführt werden kann. (Das kann auch in verbaler Beschreibung, ohne formale Gestaltung als Schluß von n auf n+1, geschehen; jedoch eine lediglich etwa als "usw." auftretende Wendung ist nicht als ausreichend anzusehen.)

201036) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, ein Dreieck ABC genüge den Bedingungen (Abb. L 1036a). Auf der Verlängerung von BA über A hinaus sei D derjenige Punkt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$, also

$$\overline{DB} = b+c$$

gilt. Dann gilt einerseits nach dem Außenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle\ DAC} = \beta + \gamma$, andererseits ist Δ DAC gleichschenklig; wegen der Winkelsumme 180° ergibt sich für $\delta := \overline{\sphericalangle\ BDC}$ der Wert

$$\delta = \overline{\sphericalangle\ ADC} = \overline{\sphericalangle\ DCA} = \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - (\beta + \gamma)).$$

Ferner ist

$$\overline{BC} = a.$$

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (Abb. L 1036b):

(1) Man konstruiert eine Strecke DB der Länge b+c.

(2) An BD trägt man in D einen Winkel der Größe $\delta = \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - (\beta+\gamma))$ an; sein freier Schenkel sei s.

(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit a. Man wählt einen der Schnittpunkte von k und s und bezeichnet ihn mit C.

(4) An DC trägt man in C nach derjenigen Seite von DC, auf der B liegt, den Winkel der Größe δ an. Den Schnittpunkt seines freien Schenkels mit BD bezeichnet man mit A.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (3) ist $\overline{BC} = a$. Da Δ DAC nach (2) und (4) gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AC}$ ist, ergibt sich aus (1) auch $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{DB} = b+c$. Ferner folgt aus (2) und (4), daß $\overline{\sphericalangle\ DAC} = 180^\circ - 2\delta = \beta + \gamma$ gilt; nach dem Außenwinkelsatz besagt dies $\overline{\sphericalangle\ ABC} + \overline{\sphericalangle\ BCA} = \beta + \gamma$.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (3) ergibt (für die vorgegebenen Größen a, b+c, $\beta + \gamma$) zwei verschiedene Punkte, die als C gewählt werden können. Sie seien so mit C_1, C_2 bezeichnet, daß C_1 zwischen D und C_2 liegt. Konstruktionsschritt (4) ergibt zu ihnen entsprechend zwei Punkte A_1, A_2 mit $\overline{\sphericalangle DC_1A_1} = \overline{\sphericalangle DC_2A_2} = \delta$, also (da dies Stufenwinkel sind) $C_1A_1 \parallel C_2A_2$, woraus auch für die Stufenwinkel

$$\overline{\sphericalangle C_1A_1B} = \overline{\sphericalangle C_2A_2B}$$

folgt. Nach (3) ist ferner

$$\overline{BC_1} = \overline{BC_2},$$

also $\triangle BC_1C_2$ gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle BC_2A_2} + \delta = \overline{\sphericalangle BC_2C_1} = \overline{\sphericalangle BC_1C_2}$ und da nach dem Außenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle BC_1C_2} = \overline{\sphericalangle DBC_1} + \delta = \overline{\sphericalangle A_1BC_1} + \delta$ gilt, folgt

$$\overline{\sphericalangle A_1BC_1} = \overline{\sphericalangle BC_2A_2}.$$

Nach dem Kongruenzsatz sww ist folglich $\triangle A_1BC_1 \cong \triangle A_2BC_2$, wobei A_1,B,C_1 in dieser Reihenfolge mit A_2,C_2,B zur Deckung gebracht werden können.

Damit ist bewiesen, daß alle Dreiecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, einander kongruent sind.

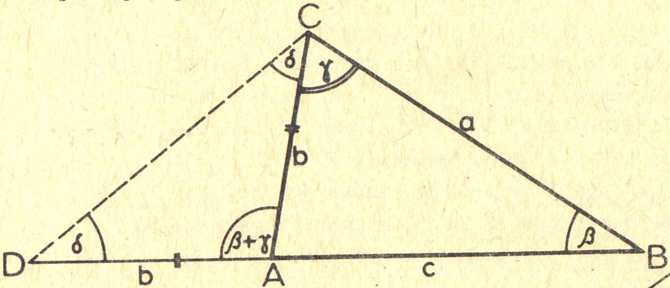

Abb. L 1036a

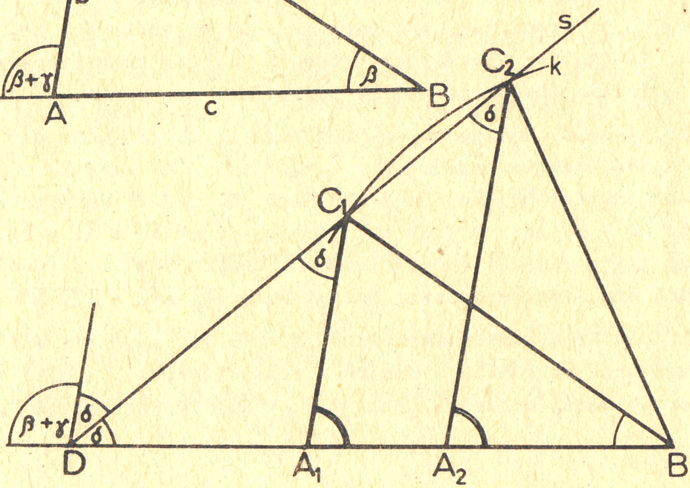

Abb. L 1036b