A 10

XX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

201021

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl

$$1 + 4.9^{2n}$$

eine Primzahl ist!

201022

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{BC} = 4$ cm und $\overline{AC} = 3$ cm. Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{AC}$ schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius $\overline{BP_1}$ schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CP_2}$ schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.

Berechnen Sie das Verhältnis $\overline{AP_3} : \overline{CP_3}$!

201023

Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen so existiert, daß

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

gilt!

Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

A 10

<u>201024</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0 < z < 1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

L 10

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

201021) Lösung: **10 Punkte**

Man beweist zunächst, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $1+4\cdot 9^{2n}$ durch 5 teilbar ist.

<u>1. Beweisweg hierzu:</u> Es gilt

$$1+4\cdot 9^{2n} \equiv 1 + (-1)\cdot(-1)^{2n} \equiv 1-1 \equiv 0 \mod 5 .$$

<u>2. Beweisweg hierzu:</u> In der Folge $9^0 = 1$, $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, ... der Potenzen von 9 treten (bei dekadischer Ziffernschreibweise) abwechselnd die Endziffern 1 und 9 auf, beginnend mit $9^0 = 1$. Daher endet für jede natürliche Zahl n die Zahl 9^{2n} auf 1, die Zahl $4\cdot 9^{2n}$ folglich auf 4 und somit die Zahl $1+4\cdot 9^{2n}$ auf 5. Also ist sie durch 5 teilbar.

Für $n = 0$ ist nun $1+4\cdot 9^{2n} = 1+4\cdot 9^0$ die Primzahl 5 selbst, für $n > 0$ ist dagegen $1+4\cdot 9^{2n} > 1+4\cdot 9^0 = 5$, also, da durch 5 teilbar, nicht Primzahl.

Somit ist genau für $n = 0$ die Zahl $1+4\cdot 9^{2n}$ eine Primzahl.

201022) Lösung: **10 Punkte**

Nach dem Satz von Pythagoras, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ und mithin

(1) $\overline{AB} = 5$ cm.

Der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes sei D genannt.

Da die Innenwinkel des Dreiecks an den Eckpunkten A und B spitze Winkel sind, liegt D zwischen A und B.

Nach dem Kathetensatz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt $\overline{AC}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{AB}$ und somit

(2) $\overline{AD} = \frac{9}{5}$ cm.

Da das Dreieck AP_1C wegen $\overline{CA} = \overline{CP_1}$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{AD} = \overline{DP_1}$ und damit folgt

$\overline{BP_1} = \overline{AB} - 2\,\overline{AD} = 5\text{ cm} - \frac{18}{5}\text{ cm}$ und somit

(3) $\overline{BP_1} = \frac{7}{5}\text{ cm}$.

Nach Konstruktion sind die Strecken BP_1 und BP_2 gleich lang.
Aus $\overline{BC} = 4$ cm und (3) folgt

$\overline{CP_2} = 4\text{ cm} - \frac{7}{5}\text{ cm}$, also

(4) $\overline{CP_2} = \frac{13}{5}\text{ cm}$.

Schließlich gilt wegen $\overline{CP_2} = \overline{CP_3}$ und $\overline{AC} = 3$ cm.

(5) $\overline{AP_3} = 3\text{ cm} - \frac{13}{5}\text{ cm} = \frac{2}{5}\text{ cm}$.

Das Verhältnis $\overline{AP_3} : \overline{CP_3}$ beträgt daher $\frac{2}{5} : \frac{13}{5}$, bzw. es gilt

$$\overline{AP_3} : \overline{CP_3} = 2 : 13.$$

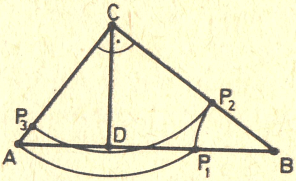

Abb. L 1022

201023) Lösung: **10 Punkte**

Für jede natürliche Zahl $n \geqq 13$ gilt: Zu n existiert kein Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft; denn für $n \geqq 13$ und jedes Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen ist

$$(a+n)(b+n)(c+n) \geqq 13^3 = 2197 > 1980.$$

Angenommen weiterhin, es gäbe natürliche Zahlen u,v,w mit

$$u \geqq 12,\quad v \geqq 12,\quad w \geqq 12,\quad uvw = 1980. \qquad (1)$$

Aus der Primzerlegung

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \qquad (2)$$

folgte dann: Eine der Zahlen u,v,w, etwa u, müßte den Primfaktor 11 enthalten. Wegen $u \geqq 12$ müßte sie aber noch (mindestens) einen weiteren Primfaktor enthalten, also wäre $u \geqq 22$ und somit $vw \leqq 90$, im Widerspruch zu $v \geqq 12$, $w \geqq 12$.

Daher gibt es keine natürlichen Zahlen u,v,w mit (1); d. h., auch zu der Zahl n = 12 existiert kein Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft. Kann man nun zeigen, daß natürliche Zahlen u,v,w mit

$$u \geqq 11,\quad v \geqq 11,\quad w \geqq 11,\quad uvw = 1980 \qquad (3)$$

existieren, so ist bewiesen, daß zu der Zahl $n = 11$ zugehörige Tripel (a,b,c) existieren, daß die zu ermittelnde größte Zahl also

$$n = 11$$

lautet.

Um (zu zeigen, daß (3) erfüllbar ist, und sogar) alle Möglichkeiten für (3) zu ermitteln, sei zunächst angenommen, für natürliche Zahlen u,v,w gelte (3). Aus der Primzerlegung (2) folgt dann wieder, daß eine der Zahlen u,v,w, etwa u, den Primfaktor 11 enthält. Gäbe es hierzu außer

$$u = 11,$$
$$vw = 180 \qquad (4)$$

noch eine andere Möglichkeit, bei der u außer 11 noch einen weiteren Primfaktor enthielte, so enthielte vw diesen nicht mehr, und es folgte $vw \leqq 90$ im Widerspruch zu $v \geqq 11$, $w \geqq 11$. Gäbe es ferner für (4) bis auf die Reihenfolge der Faktoren v,w außer

$$v = 2^2 \cdot 3 = 12, \quad w = 3 \cdot 5 = 15$$

noch eine andere Möglichkeit, so enthielte eine der Zahlen v,w außer den hier angegebenen Primfaktoren noch einen weiteren, und dabei enthielte die andere Zahl jeweils diesen Primfaktor nicht mehr; das aber ergäbe den Widerspruch $v \leqq 6$ bzw. $w \leqq 5$.

Damit ist bewiesen: Bis auf die Reihenfolge der Faktoren gibt es für (3) genau die Darstellungsmöglichkeit

$$1980 = 11 \cdot 12 \cdot 15.$$

Zu der Zahl $n = 11$ gibt es daher als zugehörige Tripel (a,b,c) mit der geforderten Eigenschaft genau diejenigen, die sich von $(a,b,c) = (0,1,4)$ höchstens durch die Reihenfolge unterscheiden, also genau die Tripel

(0,1,4), (0,4,1), (1,0,4), (1,4,0), (4,0,1), (4,1,0).

<u>201024) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Die Aufgabe fordert, alle z zu ermitteln, für die

$$0 < z < 1 \qquad (1)$$

und

$$z + \frac{1}{z} \geqq 4 \qquad (2)$$

gilt.

Wegen $z \neq 0$ ist (2) äquivalent mit

$$z^2 + 1 \geqq 4z$$

und dies der Reihe nach mit

L 10

$$(z-2)^2 \geqq 3,$$
$$|z - 2| \geqq \sqrt{3},$$

$$z - 2 \geqq \sqrt{3} \text{ oder } z - 2 \leqq -\sqrt{3},$$
$$z \geqq 2 + \sqrt{3} \text{ oder } z \leqq 2 - \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Wegen $2+\sqrt{3} > 1$ und $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ ist das gleichzeitige Bestehen von (1) und (3) äquivalent mit der Ungleichung

$$0 < z \leqq 2-\sqrt{3},$$

die somit alle gesuchten Zahlen z angibt.

Andere Lösungswege ergeben sich z. B. durch Betrachtung der Parabel $y = z^2 - 4z + 1$ und ihrer Nullstellen.

Hinweis zur Korrektur: Wird (wie in dem hier angegebenen Lösungsweg) auf die Äquivalenz der Umformungen hingewiesen, so ist eine Probe nicht erforderlich.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

201021

Angabe der Zahl 5 als einer Lösung mit Probe	2 Punkte
Erkenntnis, daß Term stets durch 5 teilbar ist	2 Punkte
Nachweis dafür, daß Term stets durch 5 teilbar ist	5 Punkte
Schlußfolgerung und Angabe der Lösungsmenge	1 Punkt
	10 Punkte

201022

Berechnung von $\overline{AB}$	1 Punkt
Berechnung von $\overline{AD}$	2 Punkte
Berechnung von $\overline{DP_1}$	1 Punkt
Berechnung von $\overline{BP_1}$	1 Punkt
Berechnung von $\overline{CP_2}$	2 Punkte
Berechnung von $\overline{AP_3}$	2 Punkte
Angabe des Verhältnisses	1 Punkt
	10 Punkte

201023

Erkenntnis und Begründung, daß n kleiner oder gleich 12	2 Punkte
Ausschluß von $n = 12$ mit Begründung	2 Punkte
Angabe von $n = 11$ und eines Tripels	1 Punkt
Zerlegung in 11.12.15 und Ausschluß anderer Möglichkeiten	3 Punkte
Angabe der geforderten 6 Tripel	2 Punkte
	10 Punkte

201024

Aufstellen der Beziehung $z + \frac{1}{z} \geqq 4$	1 Punkt
Aufstellen einer quadratischen Ungleichung, z. B. $z^2 - 4z + 1 \geqq 0$	2 Punkte
Angabe $/z-2/$	1 Punkt
Angabe beider Teile (3)	2 Punkte
Ausschluß von $z \geqq 2 + \sqrt{3}$	2 Punkte
Angabe der Lösungsmenge	2 Punkte
	10 Punkte