Bezirksolympiade

1. In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, daß es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{ccccccl}
a & b & c & 5 & 5 & \quad : & 5\,d\,e \;=\; f\,5\,g \\
h & i & 5 & & & & \\
\cline{1-3}
j & k & m & n & & & \\
p & 5 & q & r & & & \\
\cline{1-4}
 & s & t & u & v & & \\
 & w & x & y & z & &
\end{array}$$

2. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.
Beweisen Sie, daß dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

3. Von einem Rechteck ABCD und einem Punkt P in seinem Innern wird $\overline{PA} = \sqrt{2}$ cm, $\overline{PB} = \sqrt{3}$ cm, $\overline{PC} = \sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.

Beweisen Sie, daß die Länge $\overline{PD}$ durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

200934

Ermitteln Sie alle Paare (a; b) natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.

(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.

(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

200935

Beweisen Sie, daß man den Körper eines regulären Tetraeders ABCD so durch eine Ebene schneiden kann, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders ABCD den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders ABCD versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt.

200936

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40^\circ$ und $h_b = 5$ cm!

Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle$ CBA und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

200931) Lösung: **7 Punkte**

Wenn eine Ersetzung den Anforderungen genügt, dann folgt:

$n = v = z = 5$ sowie $s = w$, $t = x$, $u = y$.

Da der Divisor nicht kleiner als 500 ist, kann in der zweiten Zeile nur dann eine dreistellige Zahl als ganzzahliges Vielfaches des Divisors stehen, wenn $f = 1$ ist. Daraus folgt $h = e = 5$ und $i = d$.

Aus $e = 5$ und der 5 in der zweiten Stelle des Ergebnisses folgt in der vierten Zeile $r = 5$.

Wegen $5 \cdot \boxed{5\,|\,d\,|\,5} = \boxed{p\,|\,5\,|\,q\,|\,5}$ kann nur $d = 0$ oder $d = 1$ und damit $q = 2$ bzw. $q = 7$ sein. In beiden Fällen folgt $p = 2$.

Sowohl aus $d = 0$ und damit $g \cdot 505 = \boxed{s\,|\,t\,|\,u\,|\,5}$ als auch aus $d = 1$ und damit $g \cdot 515 = \boxed{s\,|\,t\,|\,u\,|\,5}$ folgt zunächst, daß g ungerade und $g \neq 1$, also g eine der Zahlen 3, 5, 7, 9 ist.

Aus $n = r = 5$ folgt $u = 0$, wonach der Fall $d = 0$ ausscheidet, also nur $d = 1$ verbleibt. Wegen $3 \cdot 515 = 1545$, $5 \cdot 515 = 2575$, $7 \cdot 515 = 3605$, $9 \cdot 515 = 4635$ entsteht nur für $g = 7$ ein Produkt der Form $\boxed{s\,|\,t\,|\,u\,|\,5}$ mit $u = 0$. Also gilt $g = 7$ und damit $s = 3$, $t = 6$. Aus $d = 1$ folgt weiter $q = 7$.

Wegen $515 \cdot 157 = 80855$ folgen schließlich $a = 8$, $b = 0$, $c = 8$ und damit $j = 2$, $k = 9$, $m = 3$.

Also kann höchstens diese Ersetzung den Anforderungen der Aufgabe genügen.

Sie genügt ihnen tatsächlich; denn

$$\begin{array}{l} 80855 : 515 = 157 \\ \underline{515} \\ 2935 \\ \underline{2775} \\ 3605 \\ \underline{3605} \end{array}$$

ist eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe.

200932) Lösung: 6 Punkte

Aus $a+d = b+c$ folgt

$$a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + 2bc + c^2. \qquad (1)$$

Aus $a > b > c > d$ folgt

$$b - c > 0 \qquad (2)$$

und $a-d > a-c > b-c$, also

$$a-d > b-c. \qquad (3)$$

Wegen (2) folgt aus (3) weiter

$$a^2 - 2ad + d^2 > b^2 - 2bc + c^2. \qquad (4)$$

Durch Addition von (1) und (4) erhält man $2a^2 + 2d^2 > 2b^2 + 2c^2$ und daraus die zu beweisende Beziehung $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$.

2. Lösungsweg: Wegen $a > b > c > d$ gibt es positive Zahlen x, y, z mit $c = d+x$, $b = d+x+y$, $a = d+x+y+z$. Hiernach ist

$$a+d = 2d + x + y + z, \quad b+c = 2d + 2x + y;$$

aus $a+d = b+c$ folgt daher $x = z$, also $a = d + 2x + y$.

Somit ist weiter

$$a^2 + d^2 = 2d^2 + 4dx + 2dy + 4x^2 + 4xy + y^2,$$
$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 4dx + 2dy + 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Wegen $4x^2 + 4xy > 2x^2 + 2xy$ ist damit die Behauptung $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gezeigt.

200933) Lösung: 7 Punkte

Die Parallele durch P zu AD schneide AB in E und DC in F, die Parallele durch P zu AB schneide AD in G und BC in H. Setzt man $\overline{AE} = p$, $\overline{EB} = q$, $\overline{BH} = r$, $\overline{HC} = s$, so sind die Vierecke AEPG, EBHP, PHCF, GPFD Rechtecke mit den Seitenlängen p, r bzw. q, r bzw. q, s bzw. p, s. Für ihre Diagonalenlängen

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\text{ cm}, \quad \overline{PB} = \sqrt{3}\text{ cm}, \quad \overline{PC} = \sqrt{5}\text{ cm}, \quad \overline{PD} = x\text{ cm}$$

gilt daher nach dem Satz von Pythagoras

$$p^2 + r^2 = 2, \qquad (1)$$
$$q^2 + r^2 = 3, \qquad (2)$$
$$q^2 + s^2 = 5, \qquad (3)$$
$$p^2 + s^2 = x^2. \qquad (4)$$

Addiert man (2) und (4), so ergibt sich

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 3 + x^2, \qquad (5)$$

addiert man (1) und (3), so ergibt sich

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 7. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt $3 + x^2 = 7$, $x^2 = 4$, wegen $x > 0$ also $x = 2$.
Damit ist bewiesen, daß durch die Voraussetzungen eindeutig die Länge

$$\overline{PD} = 2 \text{ cm}$$

bestimmt ist.

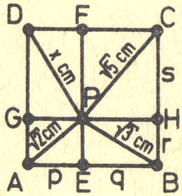

Abb. L 933

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

200934) Lösung: 6 Punkte

(I) Wenn für ein Paar $(a;b)$ natürlicher Zahlen a,b die Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

Nach (1) und (2) gibt es natürliche Zahlen m,n mit $0 < m < 10$, $0 < n < 10$ und $a = 10m + n$, $b = 10n + m$,

also $a^2 - b^2 = 100m^2 + 20mn + n^2 - 100n^2 - 20mn - m^2$

$= 99(m^2 - n^2)$;

wegen $a > b$ gilt dabei $m > n$, und es gibt eine natürliche Zahl $p > 0$ mit

$$99(m^2 - n^2) = p^2.$$

In der Primfaktorenzerlegung von p^2, und folglich auch in der von p, kommen somit die Primzahlen 3 und 11 vor; also gibt es eine natürliche Zahl q mit $p = 33q$, und es folgt $99(m^2 - n^2) = 33^2 \cdot q^2$, also $m^2 - n^2 = 11q^2$.

Hiernach ist $(m-n)(m+n)$ durch die Primzahl 11 teilbar. Wegen $0 < n < m < 10$ ist $0 < m-n < 10$, also $m-n$ nicht durch 11 teilbar. Somit ist $m+n$ durch 11 teilbar, und wegen $0 < m+n < 20$ folgt $m+n = 11$, also $n = 11 - m$ sowie

$$q^2 = \frac{(m-n)(m+n)}{11} = m-n = 2m - 11.$$

Wegen $m < 10$ folgt $q^2 < 9$; ferner ist q^2 ungerade. Hiernach verbleibt nur die Möglichkeit

$$q^2 = 1;\ 2m - 11 = 1,\ \text{also } m = 6;\ n = 11-6 = 5.$$

Daher können höchstens für das Paar $(65;56)$ die Aussagen (1), (2), (3) zutreffen.

(II) Sie treffen für dieses Paar zu; denn 65 und 56 sind zweistellig, es gilt $65 > 56$; vertauscht man die Ziffern von 65 miteinander, so erhält man 56; und es gilt

$$65^2 - 56^2 = 4225 - 3136 = 1089 = 33^2.$$

Also hat genau das Paar $(65;56)$ die geforderten Eigenschaften.

200935) Lösung: 7 Punkte

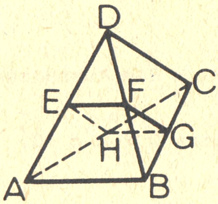

Abb. L 935

Es seien E, F, G und H die Mittelpunkte der Strecken AD, BD, BC bzw. AC.

Aus den Eigenschaften der Mittellinie des Dreiecks, angewandt auf die zueinander kongruenten gleichseitigen Dreiecke ABD, BCD, ABC und CDA, folgt

$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \frac{1}{2} a$ (1)

und ferner

EF $\parallel$ AB $\parallel$ GH und somit EF $\parallel$ GH. (2)

Daher liegen die Punkte E, F, G und H in einer gemeinsamen Ebene.

Da EB und EC als Höhen in gleichseitigen kongruenten Dreiecken gleich lang sind, ist das Dreieck BEC gleichschenklig, und G ist Mittelpunkt der Basis BC dieses Dreiecks.
Somit ist EG Höhe im Dreieck BEC.
Analog folgt, daß FH Höhe des Dreiecks BHD ist.
Wegen $\triangle BEC \cong \triangle BHD$ (nach Kongruenzsatz sss) folgt

$\overline{EG} = \overline{FH}$. (3)

Da wegen (2) die vier Punkte E, F, G und H Eckpunkte eines ebenen Vierecks sind, das wegen (1) gleichlange Seiten und wegen (3) gleichlange Diagonalen besitzt, ist EFGH ein Quadrat.
Wegen (1) hat ferner dieses Quadrat den Flächeninhalt

$I = \frac{1}{4}a^2$.

200936) Lösung: 7 Punkte

(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann liegt der Punkt B erstens auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und zweitens auf einer Parallelen zu AC im Abstand h_b.
Der Mittelpunkt M des Umkreises liegt erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf der Senkrechten, die in C auf der in C an den Umkreis gelegten Tangente errichtet wird. Auf dieser Tangente bildet derjenige von C ausgehende Strahl, der nach der Seite von AC hin verläuft, in der B nicht liegt[1], mit dem Strahl aus C durch A einen Winkel der Größe β.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel der Größe β, der Scheitelpunkt sei C genannt.

(2) Auf dem einen Schenkel des Winkels trägt man von C aus eine Strecke der Länge b ab. Der andere Endpunkt der Strecke sei A genannt.

(3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels errichtet man in C die Senkrechte s.

(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte zu AC. Schneidet sie die Senkrechte s, so sei M dieser Schnittpunkt.

(5) Um M zeichnet man einen Kreis mit dem Radius $\overline{MC}$.

(6) Man zeichnet die Parallele zu AC im Abstand h_b auf derjenigen Seite von AC, in die hinein der in (1) konstruierte Winkel nicht verläuft[1]. Schneidet diese Parallele den in (5) konstruierten Kreis um M, so sei B einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC genügt den Bedingungen der Aufgabe.

<u>Beweis:</u> Laut Konstruktion gilt $\overline{AC} = b$. Nach dem Satz über Sehnentangentenwinkel und nach Konstruktion gilt $\overline{\sphericalangle\ CBA} = \beta$. Ebenfalls nach Konstruktion hat B von AC den Abstand h_b, damit hat die von B ausgehende Höhe des Dreiecks die Länge h_b.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) bis (5) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Da der in (1) gezeichnete Winkel spitz ist, existiert genau ein Schnittpunkt der Senkrechten von (3) und (4).

---

1 <u>Hinweis:</u> Ermittelt ein Schüler zeichnerisch oder rechnerisch unter Benutzung des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes und des Satzes über Basiswinkel die Größen der Winkel $\sphericalangle$ BCA bzw. $\sphericalangle$ CAB und erhält er M als Schnittpunkt der freien Schenkel dieser beiden in C bzw. A angetragenen Winkel, so gelten diese Lösungsschritte anstelle von (3) und (4) als vollwertig. Die Lagebeschreibungen für die Tangente bzw. für die in (6) konstruierte Parallele werden vom Schüler nicht in dieser Ausführlichkeit gefordert. Schließlich ist es auch als richtig zu akzeptieren, wenn ein Schüler wegen $\overline{AB_1} \neq \overline{AB_2}$ die Dreiecke AB_1C und AB_2C als nicht zueinander kongruent wertet (nämlich nicht mit zu A,B_1,C homologen Ecken A,B_2,C).

Für die gegebenen Werte von b, β , h_b schneidet die in (6) konstruierte Parallele den in (5) konstruierten Kreis in genau zwei Punkten B_1,B_2. Es entstehen daher zwei Dreiecke AB_1C, AB_2C. Die in (4) konstruierte Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse sowohl von AC als auch von dem in (5) konstruierten Kreis als auch von der in (6) konstruierten Parallelen. Daher geht das Dreieck AB_1C bei Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten in das Dreieck CB_2A über; es gilt $\triangle AB_1C \cong \triangle CB_2A$. In diesem Sinne gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC, das die geforderten Größen aufweist.

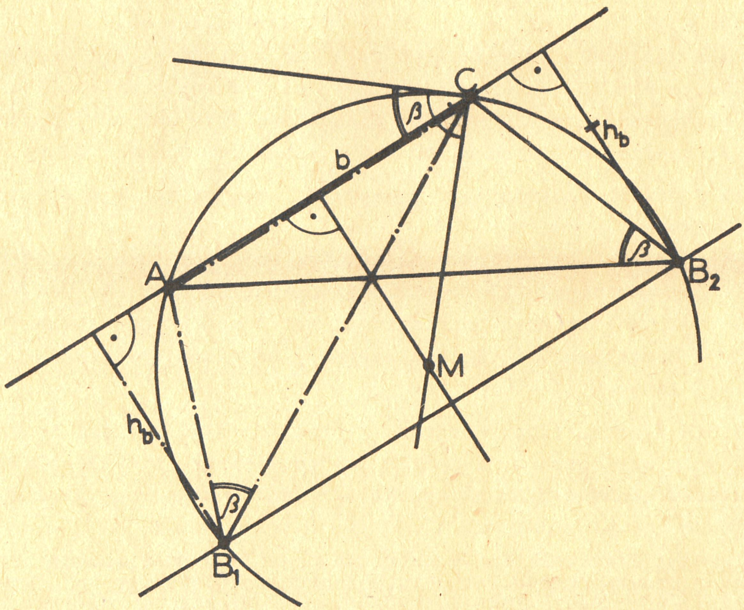

Abb. L 936