kurlauft

L 9

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

200921) Lösung: 9 Punkte

Für jede Primzahl $p \geqq 13$ gilt: Es existiert zu p kein Tripel mit der genannten Eigenschaft; denn für jedes Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen ist

$$(a+p)(b+p)(c+p) \geqq 13^3 = 2197 > 1980.$$

Kann man nun zeigen, daß natürliche Zahlen u,v,w mit

$$u \geqq 11, \quad v \geqq 11, \quad w \geqq 11, \quad uvw = 1980 \qquad (1)$$

existieren, so ist bewiesen, daß zu der Primzahl p = 11 zugehörige Tripel mit der genannten Eigenschaft existieren, daß die zu ermittelnde größte Primzahl also

$$p = 11$$

lautet.

Um (zu zeigen, daß (1) erfüllbar ist, und sogar) alle Möglichkeiten für (1) zu ermitteln, sei zunächst angenommen, für natürliche Zahlen u,v,w gelte (1). Aus der Primzerlegung

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

folgt dann: Eine der Zahlen u,v,w, etwa u, enthält den Primfaktor 11.

Gäbe es nun außer der Möglichkeit

$$u = 11, \qquad (2)$$

$$v \cdot w = 180 \qquad (3)$$

noch eine andere, bei der u außer dem Primfaktor 11 noch (mindestens) einen weiteren Primfaktor enthielte, so enthielte $v \cdot w$ diesen nicht mehr, und es folgte $v \cdot w \leqq 90$ im Widerspruch gegen $v \geqq 11$, $w \geqq 11$.

Weiterhin ist (3) erfüllbar, nämlich durch

$$v = 2^2 \cdot 3 = 12, \quad w = 3 \cdot 5 = 15; \qquad (4)$$

und gäbe es für (3) bis auf die Reihenfolge der Faktoren v, w außer (4) noch eine andere Möglichkeit, so enthielte eine der Zahlen v, w außer den hier angegebenen Primfaktoren noch einen weiteren und daher jeweils die andere Zahl diesen nicht mehr, woraus der Widerspruch $v \leqq 6$ bzw. $w \leqq 5$ folgen würde. Damit ist gezeigt: Bis auf die Reihenfolge der Faktoren besitzt 1980 genau die Darstellung

$$1980 = 11 \cdot 12 \cdot 15$$

als Möglichkeit für (1).

Zu der Primzahl $p = 11$ gibt es daher als zugehörige Tripel (a,b,c) mit der geforderten Eigenschaft genau diejenigen, die sich von $(a,b,c) = (0,1,4)$ höchstens durch die Reihenfolge unterscheiden. Das sind genau die Tripel $(0,1,4)$, $(0,4,1)$, $(1,0,4)$, $(1,4,0)$, $(4,0,1)$, $(4,1,0)$.

200922) Lösung: 8 Punkte

Zu a) genügt es z. B., zwei der folgenden Feststellungen anzuführen:

Es gilt $\frac{0+3}{0-1} = -3 < 0$, also ist $x = 0$ ein ganzzahliger Wert, der die genannte Ungleichung erfüllt.

Es gilt $\frac{-1+3}{-1-1} = -1 < 0$, also ist $x = -1$ ein ganzzahliger Wert, der die genannte Ungleichung erfüllt.

Es gilt $\frac{-2+3}{-2-1} = -\frac{1}{3} < 0$, also ist $x = -2$ ein ganzzahliger Wert, der die genannte Ungleichung erfüllt.

Man kann auch zuerst b) lösen und dann zwei ganze Zahlen aus der in b) ermittelten Menge angeben.

1. Lösungsweg zu b): Eine reelle Zahl x erfüllt genau dann die genannte Ungleichung, wenn für sie entweder

$$x + 3 > 0, \quad x - 1 < 0 \qquad (1)$$

oder

$$x + 3 < 0, \quad x - 1 > 0 \qquad (2)$$

gilt.

Die Gültigkeit von (1) ist gleichbedeutend mit

$$x > -3, \quad x < 1$$

und dies mit

$$-3 < x < 1. \qquad (3)$$

Gäbe es eine reelle Zahl x, für die (2) gilt, so folgte

$$x < -3, \quad x > 1,$$

also

$$1 < x < -3,$$

d. h., die falsche Aussage $1 < -3$. Daher gibt es keine reelle Zahl x, für die (2) gilt.
Somit ist bewiesen, daß die in b) gesuchte Menge die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x ist, für die (3) gilt.

2. Lösungsweg zu b): Für jede reelle Zahl x trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

1. Fall: Es sei $x \leqq -3$.
In diesem Fall ist $x+3 \leqq 0$, $x-1 < 0$, also $\frac{x+3}{x-1} \geqq 0$.

2. Fall: Es sei $-3 < x < 1$.
In diesem Fall ist $x+3 > 0$, $x-1 < 0$, also $\frac{x+3}{x-1} < 0$.

3. Fall: Es sei $x = 1$.
In diesem Fall ist $x-1 = 0$, also existiert $\frac{x+3}{x-1}$ nicht.

4. Fall: Es sei $x > 1$.
In diesem Fall ist $x+3 > 0$, $x-1 > 0$, also $\frac{x+3}{x-1} > 0$.

Daher ist die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der 2. Fall zutrifft, die gesuchte Menge.

200923) Lösung: 12 Punkte

Es sei A der Berührungspunkt von k_1 und k_2, und T_1, T_2 seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit der gemeinsamen äußeren Tangente durch P. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte[1] ist dann
$\overline{PT_1} = \overline{PA} = \overline{PT_2}$.

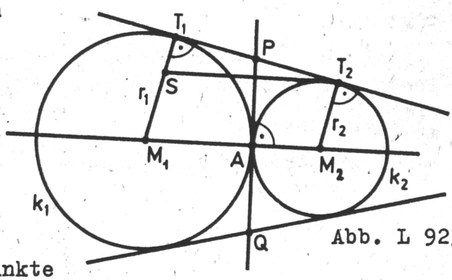

Abb. L 923

Da die Gerade durch die Mittelpunkte M_1, M_2 von k_1 bzw. k_2 durch A geht, eine Symmetrieachse der Figur aus den Kreisen k_1, k_2 und ihren gemeinsamen Tangenten ist, und da die gemeinsame innere Tangente auf dieser Geraden senkrecht steht, folgt $\overline{PA} = \overline{AQ}$ und damit
$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PA} = \overline{T_1P} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2}$.

[1] Vom Schüler entweder wie oben als bekannter Satz zu erwähnen oder (etwa aus $\triangle MPT_1 \cong \triangle MPA$ nach (ssw), wobei der Winkel als rechter Winkel der größeren Seite gegenüberliegt) zu beweisen.

L 9

Die Parallele zu M_1M_2 durch T_2 schneidet die Strecke M_1T_1 wegen $M_1T_1 \parallel M_2T_2$ und $\overline{M_1T_1} = r_1 > r_2 = \overline{M_2T_2}$ in einem Punkt S. In dem rechtwinkligen Dreieck ST_1T_2 (mit dem rechten Winkel bei T_1) ist[1] $\overline{ST_1} = r_1 - r_2$ und $\overline{ST_2} = r_1 + r_2$, so daß sich nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{PQ} = \overline{T_1T_2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$ ergibt.

200924) Lösung: 11 Punkte

Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ gilt: Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau 2n Eckpunkte. Von jedem dieser Punkte gehen zu den n-1 übrigen Eckpunkten der gleichen Grundfläche Verbindungsstrecken aus, von denen zwei jeweils Kanten der Grundfläche und die übrigen n-3 Flächendiagonalen sind. Ferner läßt sich jeder Eckpunkt mit den n Eckpunkten der anderen Grundfläche verbinden. Von diesen Verbindungsstrecken ist eine jeweils Seitenkante des Prismas, zwei sind Flächendiagonalen und die übrigen n-3 Raumdiagonalen.
Insgesamt erhält man, da dabei jede Diagonale doppelt berücksichtigt wird,

$n \cdot (n-1)$ Flächendiagonalen und $n\,(n-3)$ Raumdiagonalen, also insgesamt $n \cdot (2n-4) = 2n \cdot (n-2)$ Diagonalen.

a) Daher hat eine natürliche Zahl $n \geqq 3$ genau dann die in Aufgabe a) genannte Eigenschaft, wenn

$$2n(n-2) = 20n$$

gilt. Wegen $n \neq 0$ ist diesgleichbedeutend mit

$$n - 2 = 10$$

und dies mit

$$n = 12.$$

Somit ist genau $n = 12$ die in a) zu ermittelnde Zahl.

b) Ferner erhält man aus den oben gefundenen Anzahlen der Flächenbzw. Raumdiagonalen für $n = 12$ die in b) gesuchten Anzahlen, nämlich

$$12 \cdot 11 = 132 \quad \text{bzw.} \quad 12 \cdot 9 = 108.$$

[1] Man kann auch die Parallele zu T_1T_2 durch M_2 zum Schnitt U mit M_1T_1 bringen und weiter mit dem rechtwinkligen Dreieck M_1M_2U argumentieren.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

200921

p höchstens 11 mit Begründung	2 Punkte
p = 11 mit Angabe eines Tripels	2 Punkte
Zerlegung in 11.12.15 und Ausschluß der anderen Möglichkeiten	3 Punkte
Angabe der geforderten 6 Tripel	2 Punkte
	9 Punkte

200922

a) Angabe zweier Zahlen und Probe	2 Punkte
b) Fallunterscheidung wie (1), (2)	2 Punkte
Ausschluß des Falles (2)	2 Punkte
Angabe der Menge entsprechend (3)	2 Punkte
	8 Punkte

200923

Planfigur mit Bezeichnung	1 Punkt
$\overline{PT_1} = \overline{PA} = \overline{PT_2}$ mit Begründung	3 Punkte
$\overline{PQ} = \overline{T_1T_2}$ mit Begründung	2 Punkte
Bildung des rechtwinkligen Dreiecks ST_1T_2	1 Punkt
Angabe von $\overline{T_1T_2}$ durch $\overline{ST_1}$ und $\overline{ST_2}$	3 Punkte
Angabe von $\overline{PQ}$ durch r_1 und r_2	2 Punkte
	12 Punkte

200924

Angabe der Zahl der Flächendiagonalen durch n	2 Punkte
Angabe der Zahl der Raumdiagonalen durch n	2 Punkte
Angabe der Gesamtzahl der Diagonalen	1 Punkt
Aufstellen der Gleichung $2n \cdot (n-2) = 20$	2 Punkte
Angabe von n	2 Punkte
Angabe der Anzahl der Flächendiagonalen	1 Punkt
Angabe der Anzahl der Raumdiagonalen	1 Punkt
	11 Punkte