XX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

200821

Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er mußte sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark. Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20 % von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20 % Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wieviel der Gewinn bzw. der Verlust beträgt!

200822

Ermittle alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:
Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

200823

Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw.

in S schneiden.
Beweise, daß dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!

200824

Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt ~~P~~ F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\sphericalangle$ EDA hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle$ ABC, die Größe β des Winkels $\sphericalangle$ EFC sowie die Größe γ des Winkels $\sphericalangle$ CAB!

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

200821) Lösung: **8 Punkte**

War der frühere Kaufpreis des ersten Hundes x Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{120}{100}x$ Mark = $\frac{6}{5}x$ Mark. Daher gilt

$$\frac{6}{5}x = 180, \text{ also}$$
$$x = 150.$$

War der frühere Kaufpreis des zweiten Hundes y Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{80}{100}y$ Mark = $\frac{4}{5}y$ Mark. Daher gilt

$$\frac{4}{5}y = 180, \text{ also}$$
$$y = 225.$$

Somit hatte der frühere Kaufpreis 150 M + 225 M = 375 M betragen. Da Herr Schäfer die Hunde für insgesamt 360 Mark weiterverkaufte, erlitt er insgesamt einen Verlust von 15 Mark.

200822) Lösung: **12 Punkte**

Wenn $(a;b)$ ein Paar natürlicher Zahlen mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

24 ist ein Teiler sowohl von a als auch von b, also gibt es natürliche Zahlen p, q mit

$$a = 24p, \quad b = 24q.$$

Da 24 sogar der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, folgt ferner:

p und q sind zueinander teilerfremd. (1)

Aus $a < b$ folgt weiter $24p < 24q$, also

$$p < q; \tag{2}$$

aus $a + b = 192$ folgt $24p + 24q = 192$, also

$$p + q = 8. \tag{3}$$

Nun werden die Forderungen (2) und (3) nur durch folgende natürliche Zahlen p, q erfüllt:

p	q
0	8
1	7
2	6
3	5

Forderung (1) ist hierbei nur für $p = 1$, $q = 7$ und für $p = 3$, $q = 5$ erfüllt.

Daher können nur die Paare

(24;168), (72;120)

die geforderten Eigenschaften besitzen.

Sie besitzen diese Eigenschaften; denn es gilt:

$24 < 168$, $72 < 120$;

$24 + 168 = 192$, $72 + 120 = 192$.

Wegen $168 = 7 \cdot 24$ ist 24 der g.g.T. von 24 und 168, wegen $72 = 3 \cdot 24$ und $120 = 5 \cdot 24$ ist 24 der g.g.T. von 72 und 120, da 3 und 5 teilerfremd sind.

<u>200823) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Da die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, schneidet die Mittelsenkrechte auf PQ den Durchmesser AB in M. Sie verläuft außerdem parallel zu PR und QS und ist somit Mittellinie des Trapezes PQSR. Folglich halbiert sie die Trapezseite RS in M, d. h., es gilt $\overline{RM} = \overline{SM}$, w.z.b.w.

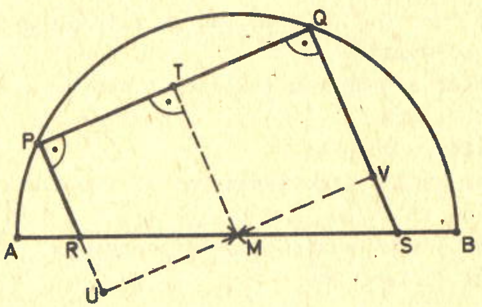

Abb. L 823

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Zur Bewertung ist festzustellen, ob vom Schüler genügend genau die folgenden Sätze als verwendet angegeben wurden:

L 8

Wenn eine Gerade parallel zur Grundlinie eines Trapezes verläuft und einen Schenkel halbiert, so ist sie die Mittellinie des Trapezes.

und:

Wenn eine Gerade die Mittellinie eines Trapezes ist, so halbiert sie dessen beide Schenkel.

Möglich ist auch (ohne Benutzung dieser Sätze) der folgende <u>zweite Lösungsweg:</u> Das Lot von M auf PQ habe den Fußpunkt T, die Parallele durch M zu PQ schneide die Gerade durch P und R in U und die Gerade durch Q und S in V. Dann sind die Vierecke MTPU und MTQV Rechtecke. Die Höhe MT im gleichschenkligen Dreieck PQM halbiert PQ, also gilt $\overline{QM} = \overline{PT} = \overline{QT} = \overline{VM}$. Im Fall PQ $\parallel$ AB ist R = U, S = V, also die Behauptung $\overline{RM} = \overline{SM}$ bewiesen. Im Fall PQ $\nparallel$ AB gilt $\overline{\sphericalangle MUR} = \overline{\sphericalangle MVS} = 90^\circ$ und $\overline{\sphericalangle RMU} = \overline{\sphericalangle SMV}$ (Scheitelwinkel), nach dem Kongruenzsatz (sww) sind die Dreiecke MRU und MSV mithin kongruent, woraus die Behauptung $\overline{RM} = \overline{SM}$ folgt.

<u>200824) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

(I) Da der Winkel $\sphericalangle$DFC Außenwinkel des Dreiecks DBF ist, gilt $\beta = \alpha + 18^\circ$.

(II) Im Dreieck EFC gilt, da es gleichschenklig mit $\overline{CE} = \overline{CF}$ ist, $\overline{\sphericalangle CEF} = \overline{\sphericalangle EFC} = \beta$, mithin nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf das Dreieck EFC,

$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$,

und wegen (I)

$$\alpha + \alpha + 18^\circ + \alpha + 18^\circ = 180^\circ, \text{ also}$$
$$3\alpha = 144^\circ, \text{ woraus man}$$
$$\alpha = 48^\circ \text{ erhält.}$$

(III) Aus $\alpha = 48^\circ$ und $\beta = \alpha + 18^\circ$ folgt $\beta = 66^\circ$.

(IV) Im Dreieck ABC ist nun nach dem Satz über die Winkelsumme $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ und wegen $\alpha = 48^\circ$ mithin $\gamma = 84^\circ$.

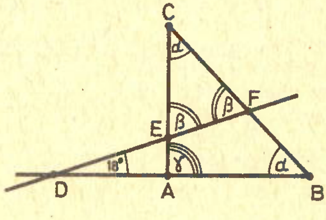

Abb. L 824

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

200821

$\frac{120}{100}x$ Mark, Verkaufspreis des ersten Hundes	1 Punkt
$\frac{6}{5}x = 180$	1 Punkt
$x = 150$	1 Punkt
Verkaufspreis des zweiten Hundes	
$\frac{80}{100}y - \frac{4}{5}y$	1 Punkt
$\frac{4}{5}y = 180$	1 Punkt
$y = 225$	1 Punkt
früherer Kaufpreis	1 Punkt
Verlust	1 Punkt
	8 Punkte

200822

Geeigneter Ansatz, etwa $a = 24\,p$, $b = 24\,q$	1 Punkt
(1) bis (3)	3 Punkte
Angabe der nach (2) und (3) möglichen Fälle	2 Punkte
Auswahl der beiden Paare	2 Punkte
Proben	2 Punkte
	10 Punkte

200823

Skizze	1 Punkt
Eigenschaft der Mittelsenkrechten einer Sehne	2 Punkte
Parallelität der Mittelsenkrechten	2 Punkte
Schluß auf Mittellinie	3 Punkte
Trapezseiten	2 Punkte
	10 Punkte

bzw.

Skizze	1 Punkt
"Herstellen" von Rechtecken	1 Punkt
Erkennen und Verwenden der Gleichschenkligkeit	2 Punkte
Schluß auf $\overline{UM} = \overline{PT} = \overline{QT} = \overline{VM}$	2 Punkte
Kongruenznachweis	2 Punkte
Sonderfall	2 Punkte
	10 Punkte

200824

I. Skizze	1 Punkt
$\beta = \alpha + 18^\circ$	1 Punkt
II. Dreieck EFC ist gleichschenklig, $\overline{CE} = \overline{CF}$	2 Punkte
$\sphericalangle CEF = \sphericalangle EFC = \beta$	1 Punkt
Winkelsumme des $\triangle EFC$ $\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$	2 Punkte
Ermitteln von $\alpha = 48^\circ$	2 Punkte
$\beta = 66^\circ$	1 Punkt
Ermitteln von $\gamma = 84^\circ$	2 Punkte
	12 Punkte