Umlauft

L 11/12;I XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

191241) Lösung: **6 Punkte**

Angenommen, für zwei Polynome $f(x)$, $g(x)$ seien die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dann folgt: Wäre $f(4) = 1$, so führten (3) und (5) auf den Widerspruch $g(1) = 1$, $g(1) = 0$. Also ist nach (1)

$$f(4) = 0.$$

Nach (4) folgt hieraus

$$g(2) = 0,\ g(4) = 0.$$

Aus (2) ergibt sich daher, daß weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$ sein kann; somit ist nach (1)

$$f(1) = 1,\ f(2) = 0.$$

Hiernach erhält man aus (3)

$$g(1) = 1,\ g(3) = 1.$$

Somit ergibt (5), daß nicht $f(3) = 1$ gelten kann; nach (1) ist also

$$f(3) = 0.$$

Aus den damit gezeigten Gleichungen

$$f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1,\quad g(1) = b_3+b_2+b_1+b_0=1, \tag{6}$$
$$f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0,\quad g(2) = 8b_3+4b_2+2b_1+b_0=0, \tag{7}$$
$$f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0,\quad g(3) = 27b_3+9b_2+3b_1+b_0=1, \tag{8}$$
$$f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 0,\quad g(4) = 64b_3+16b_2+4b_1+b_0=0 \tag{9}$$

folgt, indem man von (7), (8), (9) jeweils (6) subtrahiert und anschließend durch 1, 2 bzw. 3 dividiert,

$$7a_3 + 3a_2 + a_1 = -1,\quad 7b_3 + 3b_2 + b_1 = -1, \tag{10}$$
$$13a_3 + 4a_2 + a_1 = -\frac{1}{2},\quad 13b_3 + 4b_2 + b_1 = 0, \tag{11}$$
$$21a_3 + 5a_2 + a_1 = -\frac{1}{3},\quad 21b_3 + 5b_2 + b_1 = -\frac{1}{3}. \tag{12}$$

Subtrahiert man von (11) und (12) jeweils (10) und dividiert anschließend durch 1 bzw. 2, so folgt

$$6a_3 + a_2 = \frac{1}{2},\quad 6b_3 + b_2 = 1, \tag{13}$$
$$7a_3 + a_2 = \frac{1}{3},\quad 7b_3 + b_2 = \frac{1}{3}. \tag{14}$$

Subtrahiert man (13) von (14), so erhält man

$$a_3 = -\frac{1}{6}, \quad b_3 = -\frac{2}{3}.$$

Hieraus und aus (13), (10), (6) folgt der Reihe nach

$$a_2 = \frac{1}{2} - 6a_3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad b_2 = 1 - 6b_3 = 1 + 4 = 5,$$

$$a_1 = -1 - 7a_3 - 3a_2 \qquad b_1 = -1 - 7b_3 - 3b_2$$

$$= -1 + \frac{7}{6} - \frac{9}{2} = -\frac{13}{3}, \qquad = -1 + \frac{14}{3} - 15 = -\frac{34}{3},$$

$$a_0 = 1 - a_3 - a_2 - a_1 = 4; \ b_0 = 1 - b_3 - b_2 - b_1 = 8.$$

Daher können nur die Polynome

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4,$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8 \qquad (15)$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

In der Tat gilt für diese beiden Polynome

$$f(1) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 4 = 1, \quad g(1) = -\frac{2}{3} + 5 - \frac{34}{3} + 8 = 1,$$

$$f(2) = -\frac{4}{3} + 6 - \frac{26}{3} + 4 = 0, \quad g(2) = -\frac{16}{3} + 20 - \frac{68}{3} + 8 = 0,$$

$$f(3) = -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} - 13 + 4 = 0, \quad g(3) = -18 + 45 - 34 + 8 = 1,$$

$$f(4) = -\frac{32}{3} + 24 - \frac{52}{3} + 4 = 0, \quad g(4) = -\frac{128}{3} + 80 - \frac{136}{3} + 8 = 0.$$

Die Bedingung (1) ist daher erfüllt; denn als Werte von $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3, 4$ treten nur 0 und 1 auf.

(2) ist erfüllt; denn es ist weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$.

(3) ist erfüllt; denn es ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.

(4) ist erfüllt; denn es ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.

(5) ist erfüllt; denn es ist weder $f(3) = 1$ noch $f(4) = 1$.

Daher erfüllt genau das Paar $(f(x), g(x))$ mit $f(x), g(x)$ aus (15) alle Bedingungen der Aufgabenstellung.

191242) Lösung: 6 Punkte

Für beliebige $Q, Q' \in M$ gilt:
Ist $Q = Q'$, so ist $Q \cap Q'$ die Quadratfläche Q mit dem Umfang 4a.
Ist $Q \neq Q'$, so kann man, wenn AB eine beliebige Seite der Quadratfläche Q ist, die Ecken von Q und Q' so mit A,B,C,D bzw. A',B', C',D' bezeichnen, daß die Punkte A,A',B,D',C,C', D,B' auf dem gemeinsamen Umkreis von Q und Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind.

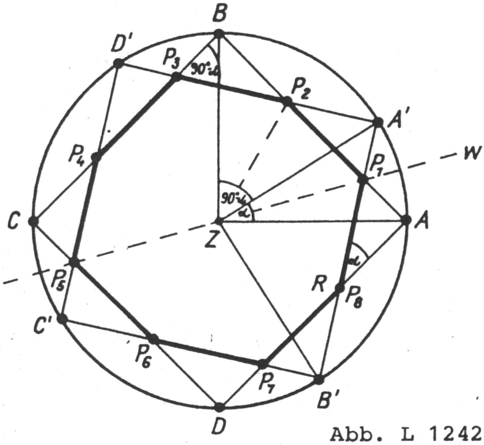

Abb. L 1242

(Abb. L 1242) Hiernach hat der Winkel $\sphericalangle AZA'$ eine Größe α mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w dieses Winkels geht A in A' über, also Q in Q' und daher (wegen des gewählten Umlaufssinns) B in B', C in C', D in D'. Wegen $\overline{\sphericalangle AZB} = 90^\circ$ und $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ schneidet w die Strecke AB in einem Punkt P_1, der bei der Spiegelung fest bleibt, also auch auf der Strecke A'B' liegt. Die Strecken AB und A'B' schneiden sich also in demjenigen Punkt P_1 auf AB, für den $\overline{\sphericalangle AZP_1} = \frac{\alpha}{2}$ gilt. Ebenso folgt: AB und D'A' schneiden sich in demjenigen Punkt P_2 auf AB, für den

$\overline{\sphericalangle BZP_2} = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, also

$\overline{\sphericalangle AZP_2} = 90^\circ - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ$ gilt. Wegen $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + 45^\circ < 90^\circ$ ist folglich die Strecke P_1P_2 eine Seite der Polygonfläche $Q \cap Q'$. Ebenso findet man die weiteren Schnittpunkte

P_3, P_4 von BC mit D'A' bzw. C'D',
P_5, P_6 von CD mit C'D' bzw. B'C',
P_7, P_8 von DA mit B'C' bzw. A'B'

und damit $Q \cap Q'$ als die Achteckfläche $P_1P_2 \ldots P_8$.

Bei Spiegelung an w geht der Schnittpunkt P_2 von AB und D'A' über in den Schnittpunkt von A'B' und DA, d. h. in P_8. Also ist $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_8}$. Ebenso folgt, daß je zwei benachbarte Seiten von $Q \cap Q'$ dieselbe Länge $s = \overline{P_1P_2}$ haben; somit gilt $u(Q \cap Q') = 8s$.

Wegen $\overline{\sphericalangle A'ZB'} = 90^\circ$ und $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ schneiden sich die Strecken ZA und A'B' in einem Punkt R, und es gilt $\overline{\sphericalangle ARP_8} = \overline{\sphericalangle A'RZ}$ (Scheitelwinkel) sowie $\overline{\sphericalangle RAP_8} = 45^\circ = \overline{\sphericalangle RA'Z}$. Somit gilt $\overline{\sphericalangle P_1P_8A} = \overline{\sphericalangle RP_8A} = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck), wegen $\overline{\sphericalangle P_1AP_8} = 90^\circ$ also $\overline{AP_1} = s.\sin\alpha$. Ebenso erhält man $\overline{\sphericalangle P_2P_3B} = 90^\circ - \alpha$, also $\overline{P_2B} = s.\cos\alpha$. Aus $a = \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2B} = s(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha)$ folgt somit

$$s = \frac{a}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Nun nimmt $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.(\cos\alpha . \cos 45^\circ + \sin\alpha . \sin 45^\circ)$ $= \sqrt{2}.\cos(\alpha - 45^\circ)$ wegen $-45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ$ genau für $\alpha - 45^\circ = 0^\circ$ seinen größten Wert an, und dieser beträgt $\sqrt{2}$. Daher (und weil für die genannten α stets $1 + \sin\alpha + \cos\alpha > 0$ gilt) existiert für alle $Q,Q' \in M$ mit $Q \neq Q'$ ein kleinstmöglicher Wert von $u(Q \cap Q') = 8s$, und dieser beträgt

$$\frac{8a}{1 + \sqrt{2}}.$$

Wegen $1 + \sqrt{2} > 2$, also $\frac{8a}{1 + \sqrt{2}} < 4a$ ist dies zugleich der kleinstmögliche Wert von $u(Q \cap Q')$ für alle $Q,Q' \in M$ auch bei zugelassenem $Q = Q'$.

<u>191243) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen erfülle die genannten Gleichungen. Dann gilt $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$; ferner gibt es eine reelle Zahl t mit $x = \tan t$, und es folgt

$$y = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t} = \tan 2t,$$

$$z = \frac{2y}{1 - y^2} = \frac{2\tan 2t}{1 - \tan^2 2t} = \tan 4t,$$

$$\tan t = x = \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2\tan 4t}{1 - \tan^2 4t} = \tan 8t.$$

Also existiert eine ganze Zahl k mit $t + k\pi = 8t$, woraus $t = \frac{k\pi}{7}$ folgt. Also ist x eine der Zahlen

$$\tan\frac{k\pi}{7} \text{ (k ganzzahlig)}.$$

L 11/12;I

Jede dieser Zahlen ist gleich einer der sieben Zahlen

$$\tan \frac{k\pi}{7} \quad (k = 0,1,\ldots,6).$$

Daher können nur die sieben Tripel

$$\left(\tan \frac{k\pi}{7},\ \tan \frac{2k\pi}{7},\ \tan \frac{4k\pi}{7}\right) \quad (k = 0,1,\ldots,6) \qquad (1)$$

die in der Aufgabe genannten Gleichungen erfüllen.
Jedes dieser Tripel erfüllt diese Gleichungen; denn für jedes dieser Tripel gilt $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$ sowie

$$\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2 \tan \frac{k\pi}{7}}{1 - \tan^2 \frac{k\pi}{7}} = \tan \frac{2k\pi}{7} = y \text{ und entsprechend}$$

$$\frac{2y}{1 - y^2} = \tan \frac{4k\pi}{7} = z, \quad \frac{2z}{1 - z^2} = \tan \frac{8k\pi}{7} = \tan \frac{k\pi}{7} = x.$$

Auch werden x,y,z in (1), wie gefordert, durch Ausdrücke angegeben, die aus den reellen Zahlen π, 7, (k=) 0,1,...,6 und 1,2 bzw. 4 durch Anwendung der Operationen .,: sowie der Funktion tan gebildet sind.

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

191244) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen n, m, b mit $n \geqq 1$, $m \geqq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m$. Dann folgte

$$((2n)^n - 1)((2n)^n + 1) = b^m. \qquad (1)$$

Hierin wären $(2n)^n - 1$ und $(2n)^n + 1$ zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen und daher zueinander teilerfremd. Jeder Primfaktor in ihren Primzerlegungen müßte folglich wegen (1) in einer Anzahl vorkommen, die ein Vielfaches von m wäre; d. h., es gäbe zwei natürliche Zahlen h und k mit

$$(2n)^n - 1 = h^m, \quad (2n)^n + 1 = k^m. \qquad (2)$$

Daraus würde sich $k^m - h^m = 2$, d. h.

$$(k - h)(k^{m-1} + k^{m-2}h + \ldots + h^{m-1}) = 2 \qquad (3)$$

ergeben. Wegen (2) und $n \geqq 1$ wäre aber $k^m > h^m \geqq (2.1)^1 - 1$, also $k > h \geqq 1$ und daher sowohl

$$k^{m-1} + k^{m-2}h + \ldots + h^{m-1} > m.h^{m-1} \geqq 2 \qquad (4)$$

als auch $k - h > 0$, also

$$k - h \geqq 1. \qquad (5)$$

Da (3), (4), (5) einen Widerspruch bilden, ist hiermit der verlangte Beweis erbracht.

191245) Lösung: 7 Punkte

Für jede ganze Zahl $i \geqq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^{i+1}} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} \quad & + \frac{1}{n^i+1} + \ldots + \frac{1}{2n^i} \\ & + \frac{1}{2n^i+1} + \ldots + \frac{1}{3n^i} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{(n-1)n^i+1} + \ldots + \frac{1}{n.n^i}\end{aligned}$$

$$> \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} + n^i \cdot \frac{1}{2n^i}$$

$$+ n^i \cdot \frac{1}{3n^i}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ n^i \cdot \frac{1}{n.n^i} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Hieraus ergibt sich:

I. Wegen der gezeigten Ungleichung für $i = 1$ gilt

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 2.(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}),$$

d. h. die zu beweisende Behauptung ist richtig für $k = 2$.

II. Angenommen, die zu beweisende Behauptung sei richtig für eine Zahl $k = i \geqq 2$, d. h. für diese gelte

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} > i \cdot (\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}),$$

Dann folgt aus der oben gezeigten Ungleichung

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^{i+1}} > (i+1).(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}),$$

d. h. die Richtigkeit der Behauptung für $k = i+1$.

Nach I. und II. ist die Behauptung für alle ganzen Zahlen $k \geqq 2$ durch vollständige Induktion bewiesen.

<u>191246 A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) Für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Ax_k + B))$$

$$= A \cdot \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k) + B = Aa + B = f(a),$$

da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k) = a$ gilt.

Damit ist bewiesen, daß für jede solche Folge (x_k) die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen f(a) ist, w.z.b.w.

b) Es sei $r = -(p+q)$ (1)

und (x_k) die Folge $(p,q,r,p,q,r,\ldots)$. Für sie gilt

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = p,\quad \sum_{k=1}^{2} x_k = p+q,\quad \sum_{k=1}^{3} x_k = 0,\quad \sum_{k=1}^{4} x_k = p,$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = p+q,\quad \sum_{k=1}^{6} x_k = 0, \ldots ;$$

im Fall $n = 3m+1$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ ist also $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p}{n}$,

im Fall $n = 3m+2$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p+q}{n}$,

im Fall $n = 3m$ $(m = 1,2,3,\ldots)$ ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Die Folge (x_k) ist daher C-konvergent gegen 0. Nach Voraussetzung ist die Folge $(f(x_k))$ somit C-konvergent gegen $f(0) = 0$,

d. h., die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$ ist (im üblichen Sinne) konvergent gegen 0. Das gilt dann auch für ihre Teilfolge

$\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right)$, d. h. es ist $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = 0$.

Wegen $\sum_{k=1}^{3m} f(x_k) = m.(f(p)+f(q)+f(r))$ besagt dies

$\frac{1}{3}(f(p)+f(q)+f(r)) = 0$ und daher

$$f(p) + f(q) = -f(r). \qquad (2)$$

Weiter sei (x'_k) die Folge $(r,-r,r,-r,\ldots)$. Für sie gilt:

Im Fall $n = 2m+1$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x'_k = \frac{r}{n}$,

im Fall $n = 2m$ $(m = 1,2,3,\ldots)$ ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x'_k = 0$.

Daher ist die Folge C-konvergent gegen 0, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x'_k)\right) = 0, \text{ also auch } \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} f(x'_k)\right) = 0,$$

$$\text{wegen } \sum_{k=1}^{2m} f(x'_k) = m.(f(r) + f(-r)) \text{ also } \frac{1}{2}(f(r) + f(-r)) = 0,$$

$$- f(r) = f(-r). \qquad (3)$$

Aus (2), (3), (1) folgt die Behauptung $f(p) + f(q) = f(p+q)$.

191246 B) Lösung: 8 Punkte

Die weißen Handschuhe für die rechte Hand seien $w_1, \ldots, w_5$,
die weißen Handschuhe für die linke Hand seien $W_1, \ldots, W_5$,
die schwarzen Handschuhe für die rechte Hand seien $s_1, \ldots, s_5$,
die schwarzen Handschuhe für die linke Hand seien $S_1, \ldots, S_5$ genannt.

Die möglichen Spiele seien durch Aufzählen der entnommenen Handschuhe beschrieben. Dabei werde die Reihenfolge der Entnahme nicht in der Beschreibung erfaßt, und die Indizes seien nicht mit angegeben; jede solche Aufzählung von Symbolen w, W, s oder S beschreibt also mehrere mögliche Spiele. Zur Abkürzung seien Wiederholungen gleicher Symbole in Form von "Potenzen" geschrieben.

a) Ein Spiel von 10 Zügen ist nicht mit Sicherheit erfolgreich; denn es kann z. B. auch w^5s^5 lauten. Ein Spiel von 11 Zügen dagegen ist mit Sicherheit erfolgreich. Für jedes solche Spiel trifft nämlich nicht zu, daß sich unter den 11 entnommenen Handschuhen sowohl nur eine der beiden Sorten w, W als auch nur eine der beiden Sorten s, S befindet (denn das wären zusammen höchstens 5 + 5 Handschuhe). Die in a) gesuchte Zahl ist also $n = 11$.

b) Alle Möglichkeiten, mit 6 Zügen kein passendes Paar zu erhalten, ergeben sich aus folgenden Aufzählungen:

$$w^5s,\ w^5S,\ W^5s,\ W^5S,\ ws^5,\ wS^5,\ Ws^5,\ WS^5, \qquad (1)$$
$$w^4s^2,\ w^4S^2,\ W^4s^2,\ W^4S^2,\ w^2s^4,\ w^2S^4,\ W^2s^4,\ W^2S^4, \qquad (2)$$
$$w^3s^3,\ w^3S^3,\ W^3s^3,\ W^3S^3. \qquad (3)$$

In jeder der 8 Aufzählungen (1) kann man die Reihenfolge der sechs vorkommenden Symbole noch beliebig wählen; da sie in zwei Klassen zu fünf bzw. einem Symbol zerfallen, gibt es für die

Wahl der Reihenfolge je $\frac{6!}{5!1!} = 6$ Möglichkeiten. Ferner kann man (in jeder der entstehenden Reihenfolge von Symbolen) bei dem ersten der fünf gleichen Symbole als Index genau 5 verschiedene Werte wählen, dann bei dem zweiten genau 4 usw., ebenso bei dem nur einmal vorkommenden Symbol genau 5 Werte. So ergeben sich für (1) insgesamt 8.6.5.4.3.2.1.5 Möglichkeiten.

Entsprechend findet man unter Verwendung von $\frac{6!}{4!2!} = 15$ und $\frac{6!}{3!3!} = 20$ die Anzahlen für (2) und (3) und damit insgesamt

$$8.6.5.4.3.2.1.5 \quad + \quad 8.15.5.4.3.2.5.4 \quad + \quad 4.20.5.4.3.5.4.3$$
$$= 16.6.5.4.3.5.(1 + 10 + 10)$$

erfolglose Spiele von 6 Zügen.

Die Anzahl aller Spiele von 6 Zügen ist 20.19.18.17.16.15. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 6 Zügen erfolglos ist, gleich $\frac{16.6.5.4.3.5.21}{20.19.18.17.16.15} = \frac{7}{323} > \frac{1}{100}$.

Alle Möglichkeiten, mit 7 Zügen kein passendes Paar zu finden, kann man aus den in (1), (2), (3) aufgezählten Spielen folgendermaßen erhalten: In jedem dieser Spiele kommen genau zwei der vier Symbole w, W, s, S vor. Nur aus diesen beiden Sorten ist noch ein weiterer Handschuh hinzuzufügen. Hierfür gibt es genau 4 Möglichkeiten; denn die beiden in Betracht kommenden Sorten enthalten insgesamt 10 Handschuhe, und von diesen sind schon 6 entnommen. Die Anzahl aller erfolglosen Spiele von 7 Zügen ist somit das Vierfache der Anzahl aller erfolglosen Spiele von 6 Zügen.

Andererseits ist die Anzahl aller Spiele von 7 Zügen 20.19.18.17.16.15.14, also das Vierzehnfache der Anzahl aller Spiele von 6 Zügen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 7 Zügen erfolglos ist, gleich $\frac{7}{323} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{323} < \frac{1}{100}$.

Daraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 7 Zügen erfolgreich ist, ist größer als 0,99; die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 6 Zügen erfolgreich ist, ist kleiner als 0,99. Ferner wächst die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges monoton (im weiteren Sinne) mit der Anzahl der Züge; denn jedes erfolgreiche Spiel von i Zügen ($i < 20$) hat nur erfolgreiche Fortsetzungsmöglichkeiten zu einem Spiel von i+1 Zügen, jedes erfolglose Spiel von i Zügen dagegen hat auch erfolgreiche Fortsetzungsmöglichkeiten. Somit ist für jedes $i < 6$ erst recht die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von i Zügen erfolgreich ist, kleiner als 0,99. Daher ist die in b) gesuchte Zahl $k = 7$.