XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>191231</u>

Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geqq 1$, $m \geqq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

<u>191232</u>

Es sei ABCD ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, daß sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d. h. es wird vorausgesetzt:

$$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{DA} : \overline{BC};\quad \overline{BF} : \overline{FC} = \overline{AB} : \overline{CD};$$
$$\overline{CG} : \overline{GD} = \overline{BC} : \overline{DA};\quad \overline{DH} : \overline{HA} = \overline{CD} : \overline{AB}. \qquad (1)$$

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck ABCD gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ (d. h. ABCD ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck EFGH für die Größe der Innenwinkel $\overline{\sphericalangle EFG} + \overline{\sphericalangle GHE} = \overline{\sphericalangle FGH} + \overline{\sphericalangle HEF}$ gilt (d. h. wenn EFGH ein Sehnenviereck ist).

Von den folgenden Aufgaben 191233A und 191233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

191233A

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Für alle Paare $(x_1;x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für alle rellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

191233B

Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt. Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, daß jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat.

Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

3.2. Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt. Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, daß jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

4. Man untersuche, ob unter allen Tetraedern ABCD mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$ existiert.

Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

5. Man beweise: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2} .$$

6. Gegeben sei eine positive reelle Zahl a. Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen (x;y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= 1 \\ x + y &= a . \end{aligned}$$

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

191231) Lösung: **5 Punkte**

Für $n \leqq m$ hat jede nichtleere Teilmenge von N gemeinsame Elemente mit M. Da jede Menge aus n Elementen genau 2^n Teilmengen hat, von denen genau eine die leere Menge ist, gibt es für $n \leqq m$ genau 2^n-1 Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Für $n > m$ ermittelt man zunächst die Anzahl derjenigen Teilmengen von N, die keine gemeinsamen Elemente mit M haben. Die Anzahl dieser Mengen ist gleich der Anzahl der Teilmengen der Menge $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$, also gleich 2^{n-m}. Folglich gibt es für $n > m$ genau $2^n - 2^{n-m}$ Teilmengen, die gemeinsame Elemente mit M haben.

191232) Lösung: **7 Punkte**

Es seien die Größen der Winkel $\sphericalangle BFE$, $\sphericalangle EFG$ bzw. $\sphericalangle GFG$ mit α_1, α bzw. α_2 bezeichnet, analog seien die aus Abb. L 1232 ersichtlichen Bezeichnungen $\beta_1, \beta, \beta_2, \gamma_1, \gamma, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta$ eingeführt. Hiernach gilt stets $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta =$

$$= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \delta_1 + \delta_2 + \delta = 180^\circ. \qquad (2)$$

Aus der Voraussetzung (1) folgt ferner stets

$$\frac{\overline{AE} + \overline{EB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DA} + \overline{BC}}{\overline{BC}} \quad \text{und damit} \quad \overline{EB}(\overline{DA} + \overline{BC}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}.$$

Analog erhält man aus (1) weitere Gleichungen, insgesamt

$$\overline{BE}(\overline{DA} + \overline{BC}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}, \qquad \overline{BF}(\overline{AB} + \overline{CD}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC},$$
$$\overline{CG}(\overline{BC} + \overline{DA}) = \overline{BC} \cdot \overline{CD}, \qquad \overline{CF}(\overline{AB} + \overline{CD}) = \overline{BC} \cdot \overline{CD},$$
$$\overline{DG}(\overline{BC} + \overline{DA}) = \overline{CD} \cdot \overline{DA}, \qquad \overline{DH}(\overline{AB} + \overline{CD}) = \overline{CD} \cdot \overline{DA},$$
$$\overline{AE}(\overline{BC} + \overline{DA}) = \overline{DA} \cdot \overline{AB}, \qquad \overline{AH}(\overline{AB} + \overline{CD}) = \overline{DA} \cdot \overline{AB}.$$

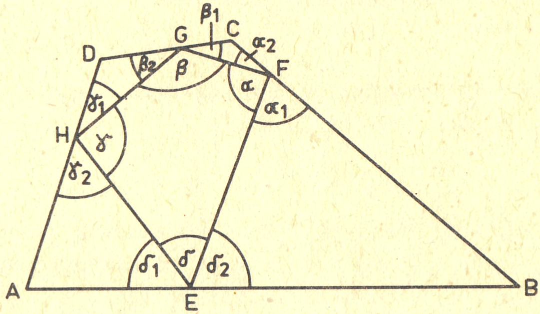

Abb. L 1232

Folglich gilt:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{\overline{BC}+\overline{DA}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AH}}. \qquad (3)$$

Der verlangte Beweis kann nun in den folgenden Teilbeweisen I, II erbracht werden:

I. Angenommen, ABCD sei ein Tangentenviereck, d. h. es gelte $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$. Zu zeigen ist, daß dann EFGH ein Sehnenviereck ist.
Nach (3) folgt aus der Voraussetzung
$\overline{BE}=\overline{BF}$, $\overline{CG}=\overline{CF}$, $\overline{DG}=\overline{DH}$, $\overline{AE}=\overline{AH}$.
Daher gilt
$\delta_2=\alpha_1$, $\alpha_2=\beta_1$, $\beta_2=\gamma_1$, $\gamma_2=\delta_1$ und somit
$\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1+\gamma_2=\beta_1+\beta_2+\delta_1+\delta_2$.
Wegen (2) folgt hieraus die Behauptung, daß $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ gilt, d. h. EFGH ein Sehnenviereck ist.

II. Angenommen, ABCD sei kein Tangentenviereck, so daß o.B.d.A. $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{BC}+\overline{DA}$ vorausgesetzt werden kann. Zu zeigen ist, daß dann EFGH kein Sehnenviereck ist.
Nach (3) folgt aus der Voraussetzung
$\overline{BE}>\overline{BF}$, $\overline{CG}>\overline{CF}$, $\overline{DG}>\overline{DH}$, $\overline{AE}>\overline{AH}$.
Da im Dreieck die größere Seite dem größeren Winkel gegenüberliegt, folgt daraus

$\alpha_1 > \delta_2$, $\alpha_2 > \beta_1$, $\gamma_1 > \beta_2$, $\gamma_2 > \delta_1$ und damit

wegen (2)

$\alpha + \gamma < \beta + \delta$.

Also ist EFGH in diesem Fall kein Sehnenviereck.

191233A) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, f sei eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.

Wegen (1) gilt dann $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$, also

$$f(0) = 0. \tag{4}$$

Für jedes reelle x gilt wegen (1) somit $f(x)+f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = 0$, also

$$f(-x) = -f(x). \tag{5}$$

Wegen (1), (5) gilt daher für alle Paare $(x_1;x_2)$ reeller Zahlen

$f(x_1-x_2) = f(x_1+(-x_2)) = f(x_1)+f(-x_2)$, also

$$f(x_1-x_2) = f(x_1) - f(x_2). \tag{6}$$

Für alle x, die von 0 und 1 verschieden sind, gilt nun nach (3)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 f(\tfrac{1}{x}) = x^2 f(1 + \tfrac{1-x}{x}), && \text{also nach (1) und (2)}\\
&= x^2 + x^2 f(\tfrac{1-x}{x}), && \text{also nach (3)}\\
&= x^2 + (1-x)^2 f(\tfrac{x}{1-x}) = x^2 + (1-x)^2 f(\tfrac{1}{1-x} - 1), && \\
& && \text{also nach (6), (2)}\\
&= x^2 + (1-x)^2 f(\tfrac{1}{1-x}) - (1-x)^2, && \text{also nach (3)}\\
&= x^2 + f(1-x) - (1-x)^2, && \text{also nach (6), (2)}\\
&= x^2 + 1 - f(x) - (1-x)^2 = 2x - f(x)
\end{aligned}$$

und daher

$$2f(x) = 2x,$$

$$f(x) = x. \tag{7}$$

Mit (2), (4), (7) ist gezeigt, daß nur die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definierte Funktion f den Bedingungen (1), (2), (3) genügen kann.

Diese Funktion genügt auch tatsächlich den Bedingungen (1), (2), (3). Daher ist genau sie die gesuchte.

191233B) Lösung: **7 Punkte**

Es sei

$$f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Dann gilt für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ [1]

$$f(2^k) = \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{2^{2k-1}+1} + \frac{1}{2^{2k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}}\right). \qquad (2)$$

Die erste Klammer auf der rechten Seite von (2) enthält 2^k Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{k+1}}$ sind; die zweite Klammer enthält 2^{k+1} Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{k+2}}$ sind, usw. usw.

Schließlich enthält die letzte Klammer 2^{2k-1} Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{2k}}$ sind. Somit gilt

$$f(2^k) > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k+1} \cdot \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + 2^{2k-1} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = k \cdot \frac{1}{2}.$$

Für $k = 2000$ ist daher $f(2^k) = f(2^{2000}) > 1000$.

Nun gilt für alle $n \geqq 2$

$$f(n+1)-f(n) = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} > \frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{n^2-n-1}{n(n+1)^2} > 0,$$

da $n^2-n-1 = n(n-1)-1 = 2 \cdot 1 - 1 > 0$ ist.

Daraus folgt $f(n_1) > f(n_2)$, falls n_1, n_2 natürliche Zahlen mit $n_1 > n_2 \geqq 2$ sind.

Hiernach ist (z. B.) die Zahl $p = 2000$ eine Zahl der zu ermittelnden Art[2]; denn für jede 2000-stellige natürliche Zahl n gilt

$$f(n) \geqq f(10^{2000}) > f(2^{2000}) > 1000.$$

[1] Hier würde auch genügen: für $k = 2000$.

[2] Selbstverständlich gibt es auch kleinere geeignete Zahlen p.

Umlauf

L 11/12;II XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>191234) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Bezeichnet man die Kantenlängen des Tetraeders ABCD mit

$\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AD} = d,\ \overline{BD} = e,\ \overline{CD} = f,$

so sind die Kanten mit den Längen c, a, b Hypotenusen in den rechtwinkligen Dreiecken ABD, BCD, CAD, und es gilt

$$a^2 = e^2 + f^2,\ b^2 = d^2 + f^2,\ c^2 = d^2 + e^2;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{de}{2} \cdot f, \text{ also } def = 6V.$$

Ferner gilt wegen $d > 0,\ e > 0,\ f > 0$

$$d + e + f \geqq 3\sqrt[3]{def} = 3\sqrt[3]{6V};$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= \sqrt{e^2 + f^2} + \sqrt{d^2 + f^2} + \sqrt{d^2 + e^2} \\ &\geqq \sqrt{2ef} + \sqrt{2df} + \sqrt{2de} \\ &\geqq \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{ef} \cdot \sqrt{df} \cdot \sqrt{de}} = \sqrt{2}\cdot 3\sqrt[3]{def} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{6V}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Summe der Kantenlängen des Tetraeders ABCD

$$s = a+b+c + d+e+f = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{6V} + 3\sqrt[3]{6V} = 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{6V}.$$

Nun wird für $d = e = f = \sqrt[3]{6V}$

$$a = b = c = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6V},$$

also

$$s = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6V} + 3\sqrt[3]{6V} = 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{6V},$$

d. h., die Summe der Kantenlängen des Tetraeders ABCD nimmt ein Minimum an, und zwar

$$s_{min} = 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{6V}.$$

<u>191235) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Angenommen, es gäbe positive ganze Zahlen p, q mit der in der Aufgabe genannten Eigenschaft.

Wegen der Irrationalität von $\frac{1}{\sqrt{3}}$ wäre dann $\frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{p}{q}$, also

$$\text{(A)}\quad \frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} \quad \text{oder} \quad \text{(B)}\quad \frac{p}{q} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Aus (B) folgt $p\sqrt{3} < q$ (1)

und $3q^2\sqrt{3} < 9pq + 1.$ (2)

Aus (1) erhält man $3p^2 < q^2$, wegen der Ganzzahligkeit also $3p^2 + 1 \leqq q^2$ und damit

$$81p^2q^2 + 27q^2 \leqq 27q^4, \tag{3}$$

aus (2) folgt $27q^4 < 81p^2q^2 + 18pq + 1,$ (4)

aus (1) $18pq < 6q^2\sqrt{3}.$ (5)

(3), (4), (5) ergeben $27q^2 < 6q^2\sqrt{3} + 1,$ (6)

wegen $1 \leqq q^2$ also $27 < 6\sqrt{3} + 1$, womit ein Widerspruch erreicht ist (es folgte $13 < 3\sqrt{3}$, $169 < 27$).

Aus (A) folgt $9pq - 1 < 3q^2\sqrt{3}$ (7)

und $q < p\sqrt{3}$ (8)

Aus (B) erhält man $q^2 < 3p^2$, wegen der Ganzzahligkeit also $q^2 + 1 \leqq 3p^2$ und damit

$$27q^4 + 27q^2 \leqq 81p^2q^2, \tag{9}$$

aus (7) folgt

$$81p^2q^2 - 18pq + 1 < 27q^4, \tag{10}$$

sowie $18pq - 2 < 6q^2\sqrt{3}$. (11)

(9), (10) und (11) ergeben ebenfalls den Widerspruch (6). Damit ist der verlangte Beweis geführt.

<u>191236) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, zu einem gegebenen Wert $a > 0$ habe das Gleichungssystem

$$x^5 + y^5 = 1, \tag{1}$$

$$x + y = a \tag{2}$$

eine reelle Lösung $(x;y)$. Dann gilt wegen (2)

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 = a^5, \tag{3}$$

also wegen (1)

$$5xy(x^3 + 2xy(x+y) + y^3) = a^5 - 1 \tag{4}$$

und somit wegen (2)

$$xy(x^3 + y^3 + 2axy) = \frac{a^5 - 1}{5}. \qquad (5)$$

Setzt man

$$xy = z, \qquad (6)$$

so gilt wegen (2)

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a^3,$$

$$x^3 + y^3 = a^3 - 3az,$$

also wegen (5)

$$z(a^3 - 3az + 2az) = \frac{a^5 - 1}{5},$$

$$az^2 - a^3z + \frac{a^5 - 1}{5} = 0. \qquad (7)$$

Diese quadratische Gleichung hat wegen $\frac{a^4}{4} - \frac{a^5-1}{5a} = \frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a} > 0$ genau die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}. \qquad (8)$$

Aus (2) und (6) folgt ferner[1] $x^2 + z = ax$,

$$x^2 - ax + z = 0. \qquad (9)$$

Um hieraus weitere Schlüsse zu ziehen, diskutiert man, welches Zeichen in

$$\frac{a^2}{4} - z_{1,2} \gtreqless 0$$

gilt. Die betreffende Relation ist jeweils äquivalent mit

$$\frac{a^2}{4} \gtreqless \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}$$

$$\mp\sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} \gtreqless \frac{a^2}{4}.$$

Für jedes $a > 0$ gilt $-\sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} < \frac{a^2}{4}$. Für jedes $a > 0$ hat daher $x^2 - ax + z_1 = 0$ keine reelle Lösung.

Ferner ist das Bestehen von

$$\sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} \gtreqless \frac{a^2}{4}$$

jeweils äquivalent mit

$$\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a} \gtreqless \frac{a^4}{16},$$

[1] Hinweis: Leitet man dies durch Einsetzen von $y = \frac{z}{x}$ in (2) her, so muß man den Fall $x = 0$ gesondert betrachten.

$$\frac{1}{5a} \gtreqless \frac{a^4}{80},$$

$$16 \gtreqless a^5,$$

$$\sqrt[5]{16} \gtreqless a .$$

Falls daher $a > \sqrt[5]{16}$ ist, hat auch die Gleichung $x^2 - ax + z_2 = 0$ keine reelle Lösung.

Falls aber $(0 <)\ a \leqq \sqrt[5]{16}$ ist, so hat diese Gleichung genau die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - z_2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}} \qquad (10)$$

Hieraus und aus (2) erhält man (mit jeweils zum Index 1 bzw. 2 zugehörigem oberen bzw. unteren Vorzeichen)

$$y_{1,2} = \frac{a}{2} \mp \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}}. \qquad (11)$$

Damit ist gezeigt: Das Gleichungssystem (1), (2) kann nur im Fall $(0 <)\ a \leqq \sqrt[5]{16}$ reelle Lösungen haben, und zwar nur $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ mit $x_{1,2}$ aus (10) und $y_{1,2}$ aus (11).

Diese Paare sind in der Tat Lösung; denn für sie gilt $x+y = a$, d. h. (2); ferner erfüllen x_1 und x_2 auch (9), also $x(a-x) = z$, d. h. (6), mit dem Wert z_2 aus (8) für z. Dieser erfüllt (7), und da aus (6) und (2) wieder $x^3 + y^3 = a^3 - 3az$ folgt, wird (5) und damit (4) erfüllt. Subtrahiert man dies von (3) (was aus (2) folgt), so ergibt sich auch (1).

<u>Anmerkung:</u> Das Gleichungssystem (1), (2) kann auch durch Einsetzen von $y = a-x$ in Gleichung (1) gelöst werden.
Dann erhält man - der Lösungsweg wird im folgenden nur kurz skizziert -

$$5a(x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x) = 1 - a^5,$$

$$(x^2 - ax)^2 + a^2(x^2 - ax) = \frac{1}{5a} - \frac{a^4}{5}.$$

Diese für $t = x^2 - ax$ quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$t = -\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{b} \quad \text{mit} \quad b = \frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}.$$

Aus $x^2 - ax - t = 0$ erhält man dann $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + t}$.

Die weiteren Untersuchungen sind analog wie oben zu führen.