L 11/12

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

191221) Lösung: 9 Punkte

Angenommen, ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen erfülle (1). Dann ist[1])

$$z = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

$$y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1},$$

$$x = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1},$$

also $2x^2 + x = 3x + 2$, $x^2 - x - 1 = 0$, also 3

entweder $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $z = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1 + \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x$

und daher ebenso $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 3 3

oder $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $z = 1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}} = 1 + \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 1

Also können höchstens die Tripel $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$ und $(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$ Lösungen des Systems (1) sein.

Tatsächlich erfüllen sie (1), was sich (für alle drei Gleichungen des Systems) daraus ergibt, daß in diesen Tripeln $x,y,z \neq 0$ sind[2]), 2 also die linken Seiten von (1) existieren und daß

---

1) Die Existenz der oben im folgenden auftretenden Brüche (d.h. das Nichtverschwinden ihrer Nenner) ist in der Eingangsannahme, (1) sei erfüllt, mit enthalten, kann also verwendet werden, ohne zusätzlich (als weitere Voraussetzung) formuliert zu sein.

2) Hier ist diese Feststellung erforderlich.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{2+2\sqrt{5}} = 1$$

bzw.
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}+5-4}{2+2\sqrt{5}} = 1$$

gilt.

Das Gleichungssystem (1) hat daher genau die beiden angegebenen Tripel als Lösung.

191222) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, ein konvexes Viereck erfülle (1) bis (4).

Dann gibt es auf AB einen Punkt E mit $\overline{AE} = \overline{CD}$. Hiernach ist AECD ein Rhombus. In ihm stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht; wegen (4) gilt somit ED $\parallel$ BC. Also ist auch EBCD ein Rhombus, und es gilt insgesamt

$$\overline{DE} = \overline{BE} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{EC} \qquad (5)$$

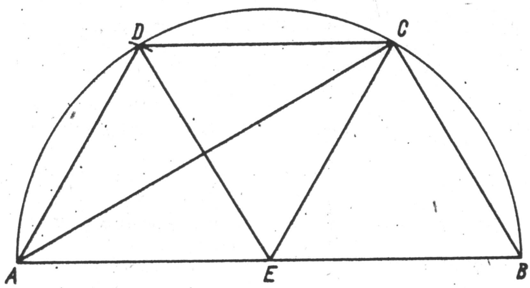

Abb. L 1222

Somit ist das Dreieck AED gleichseitig, woraus $\alpha = 60^\circ$ folgt.

Wegen (5) ist AECD ein Rhombus. Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks AEC gleich dem des Dreiecks ACD, d.h. er beträgt F_2. Den gleichen Flächeninhalt haben auch die wegen (5) gleichseitigen und untereinander kongruenten Dreiecke AED, DEC und EBC, da sie in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhenlänge mit dem Dreieck ACD übereinstimmen.

Da sich die Fläche des Dreiecks ABC aus den Flächen der Dreiecke AEC und EBC zusammensetzt, gilt mithin $F_1 = 2\ F_2$, also

$$F_1 : F_2 = 2 : 1.$$

2

Damit ist gezeigt, daß $F_1 : F_2$ und α durch die Forderungen (1) bis (4) eindeutig bestimmt sind. Wählt man umgekehrt Punkte A, D, E, C, B so, daß die Dreiecke ADE, CDE und BCE gleichseitig sind (und $C \neq A$, $B \neq D$ gilt), so wird $\sphericalangle AEB = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, E liegt auf der Strecke AB und halbiert diese; folglich liegt C auf einem Halbkreis über AB, also gilt $AC \perp BC$. Ferner sind $\sphericalangle AED$ und $\sphericalangle CDE$ gleichgroße Wechselwinkel, also ist $AB \parallel CD$. Damit sind die Forderungen (1) bis (4) als erfüllbar nachgewiesen. 3

191223) Lösung: 10 Punkte

Die Touristen seien $T_1, \ldots, T_{100}$; jeweils T_i sei in der Stadt S_i beheimatet ($i=1,.., 100$).

a) I. Behauptung:

Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in 3 Städten gewesen ist.

Beweis: Die Gruppe besuche zuerst die Stadt S_1. Jeder der Touristen $T_2, \ldots, T_{100}$ wird dort mit jedem anderen Touristen bekannt. Danach besuche die Gruppe die Stadt S_2. Dort wird T_1 mit jedem der Touristen $T_3, \ldots, T_{100}$ bekannt. Schließlich besuche die Gruppe die Stadt S_3. Dort wird auch T_1 mit T_2 bekannt; somit ist nun jeder Tourist mit jedem anderen bekannt geworden.

II. Behauptung:

Die Reisewege und -termine lassen sich nicht so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in 1 oder 2 Städten gewesen ist.

Beweis: Bei jeder Festlegung eines Reiseweges wird zuerst eine Stadt S_i und dann eine Stadt S_j besucht. Die Touristen T_i und T_j können weder in S_i noch in S_j miteinander bekannt geworden sein.

Daher ist die in a) gesuchte Zahl $n = 3$.

b) I. Behauptung:

Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in 2 Städten gewesen ist.

Beweis: Die einzelnen Reisen seien z.B. folgendermaßen festgelegt: Zuerst besuche T_1 die Stadt S_2, und $T_2, \ldots, T_{100}$ besuchen die Stadt S_1. Dort wird jeder von ihnen mit jedem anderen von ihnen bekannt. Dann bleibt T_1 in S_2, während T_2 als zweite Stadt S_3 besucht, $T_3, \ldots, T_{100}$ aber S_2. Dort wird T_1 mit jedem von ihnen bekannt. Danach besucht er als zweite Stadt S_3, wo T_2 noch bleibt und somit auch mit T_1 bekannt wird. Damit ist jeder Tourist mit jedem anderen bekannt geworden.

II. Behauptung:

Die Reisewege und -termine lassen sich nicht so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in nur einer Stadt gewesen ist.

Beweis: Angenommen, es wäre doch möglich, die Reisen derart festzulegen. Dann müßte in diesen Festlegungen diese eine Stadt für alle Touristen dieselbe sein, da ein Kennenlernen nur in einer gemeinsam besuchten Stadt möglich ist. Wäre diese Stadt aber etwa S_i, so hätte vereinbarungsgemäß T_i dort **keinen anderen** Touristen kennenlernen können, im Widerspruch zur Annahme. Diese muß daher falsch sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

Daher ist die in b) gesuchte Zahl $n = 2$.

191224) Lösung: 11 Punkte

a) Für jedes reelle x gilt

$$f_1\left(x+\pi\sqrt{2}\right) = \frac{\sin\left(x\sqrt{2}+2\pi\right)}{1+\sin^2\left(x\sqrt{2}+2\pi\right)} = \frac{\sin\left(x\sqrt{2}\right)}{1+\sin^2\left(x\sqrt{2}\right)} = f_1(x).$$

Daher ist f_1 periodisch.

b) Angenommen, f_2 wäre periodisch. Dann gäbe es eine reelle Zahl $p \neq 0$ so, daß für alle reellen x die Gleichung $f_2(x+p) = f_2(x)$ gelten würde. Daraus folgte $f_2(p) = f_2(0) = 0$, also $\sin p = 0$, also gäbe es eine ganze Zahl m mit $p = m\pi$, wobei $m = \frac{p}{\pi} \neq 0$ wäre.

Weiter folgte $f_2\left(\pi\sqrt{2} + 2m\pi\right) = f_2\left(\pi\sqrt{2}\right)$, d.h.

$$\frac{\sin\left(\pi\sqrt{2}\right)}{1+\sin^2\left(2m\pi\sqrt{2}\right)} = \sin\left(\pi\sqrt{2}\right),$$

wegen $\sin\left(\pi\sqrt{2}\right) \neq 0$ also $1 = 1 + \sin^2\left(2m\pi\sqrt{2}\right)$ und daher $\sin\left(2m\pi\sqrt{2}\right) = 0$.

Folglich gäbe es eine ganze Zahl n mit $2m\pi\sqrt{2} = n\pi$, also $\sqrt{2} = \frac{n}{2m}$ im Widerspruch gegen die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Damit ist bewiesen, daß f_2 nicht periodisch ist.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 12 Gesamtpunktzahl: 40

191221

ERmittlung einer Gleichung für eine Variable, etwa $x^2 - x - 1 = 0$	4 Punkte
Angabe der beiden Lösungstripel	3 Punkte
Nachweis, daß Tripel tatsächlich System erfüllen (Probe)	2 Punkte
	9 Punkte

191222

Nachweis, daß $F_1 : F_2$ und α eindeutig bestimmt sind	5 Punkte
Angabe der Werte von $F_1 : F_2$ und α	1 Punkt
Nachweis, daß (1), (2), (3), (4) erfüllbar sind	4 Punkte
	10 Punkte

191223

a) Überlegung I	3 Punkte
Überlegung II	2 Punkte
b) Überlegung I	3 Punkte
Überlegung II	2 Punkte
	10 Punkte

191224

a)	3 Punkte
b) Überlegungen, die auf $\sin p = 0$ führen	3 Punkte
Überlegungen, die auf $\sin 2m\pi\sqrt{2} = 0$ führen	3 Punkte
Formulieren des Widerspruches	2 Punkte
	11 Punkte