Kurlauft

L 10;I XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

191041) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, zu gegebenen a, b, c, d sei (x;y) das Koordinatenpaar eines gemeinsamen Punktes der Graphen von f und g. Dann gilt

$$y = c.10^{ax} = 10^{bx+d}. \qquad (1)$$

Wegen $10^{ax} > 0$ und $10^{bx+d} > 0$ ist damit im Falle $c \leqq 0$ ein Widerspruch erreicht. Im Falle $c > 0$ existiert lg c, und aus (1) ergibt sich $10^{ax + \lg c} = 10^{bx+d}$. Hieraus folgt

$$ax + \lg c = bx + d. \qquad (2)$$

Im Fall $a = b$, $\lg c \neq d$ stellt (2) einen Widerspruch dar. Im Fall $a = b$, $\lg c = d$ gilt (2) für alle x[1], im Fall $a \neq b$ nur für

$$x = \frac{d - \lg c}{a - b}, \qquad (3)$$

woraus wegen (1) noch

$$y = 10^{bx+d} = 10^{\frac{ad - b.\lg c}{a - b}} \qquad (4)$$

folgt.

Umgekehrt wird im Fall $a = b$, $\lg c = d$ für jedes x mit $y = c.10^{ax}$ zusammen (1) erfüllt, und im Fall $a \neq b$ erfüllen (3), (4) auch

$$a.\frac{d - \lg c}{a - b} + \lg c = \frac{ad - b.\lg c}{a - b} = b.\frac{d - \lg c}{a - b} + d,$$

also (2) und damit (1).

Somit ist gezeigt:

Im Fall $c \leqq 0$ und im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c \neq d$ haben die Graphen von f und g keinen gemeinsamen Punkt.

Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ haben die Graphen von f und g alle Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x; c.10^{ax})$ (x beliebig reell) gemeinsam.

1 Diese Feststellung ist an dieser Stelle entbehrlich.

L 10;I

Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ haben die Graphen von f und g genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{d - \lg c}{a - b};\ 10^{\frac{ad - b.\lg c}{a - b}}\right)$ gemeinsam.

<u>191042) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Unter Beachtung von $2.\frac{1}{234} = \frac{1}{117}, \ldots, 2.\frac{1}{466} = \frac{1}{233}$ usw. erhält man: Es gilt

$$
\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{233} - \frac{1}{234} + \frac{1}{235} - + \ldots + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} \\
& \qquad - \frac{1}{234} - \frac{1}{235} - - \ldots - \frac{1}{465} - \frac{1}{466} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{116} + \frac{1}{117} - \frac{1}{118} + - \ldots - \frac{1}{232} + \frac{1}{233} \\
& \qquad - \frac{1}{117} - \frac{1}{118} - - \ldots - \frac{1}{232} - \frac{1}{233} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{58} + \frac{1}{59} - \frac{1}{60} + - \ldots + \frac{1}{115} - \frac{1}{116} \\
& \qquad - \frac{1}{59} - \frac{1}{60} - - \ldots - \frac{1}{115} - \frac{1}{116} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} + \frac{1}{31} - + \ldots + \frac{1}{57} - \frac{1}{58} \\
& \qquad - \frac{1}{30} - \frac{1}{31} - - \ldots - \frac{1}{57} - \frac{1}{58} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + - \ldots - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + - \ldots - \frac{1}{28} + \frac{1}{29} \\
& \qquad - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - - \ldots - \frac{1}{28} - \frac{1}{29} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \\
& \qquad - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
& \qquad - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \\
= {} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
& \qquad - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
= {} & 0.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Behauptung.

191043 A) Lösung: 7 Punkte

Nach den Additionstheoremen gilt

$$2 \cos x \cos y = \cos (x-y) + \cos (x+y),$$
$$2 \sin x \sin y = \cos (x-y) - \cos (x+y).$$

Folglich ist die linke Seite von der zu beweisenden Ungleichung gleich der Zahl

$$\sqrt{(\cos(x-y)+\cos(x+y))^2+\sin^2(x-y)} + \sqrt{(\cos(x-y)-\cos(x+y))^2+\sin^2(x-y)} \quad (1)$$

Setzt man $\cos(x-y) = a$, $\sin(x-y) = b$, $\cos(x+y) = c$, so ist die in (1) angegebene Zahl gleich

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}.$$

Nun gilt, wie in der Aufgabe 191036 der Bezirksolympiade bewiesen wurde, die Ungleichung

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geqq 2\sqrt{a^2+b^2}. \quad (2)$$

Da in unserem Fall $a^2+b^2 = \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) = 1$ gilt, ist mit (2) der geforderte Nachweis erbracht.

191043 B) Lösung: 7 Punkte

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c, m, n, k gilt:
Die Zahl a^m läßt bei Division durch 8 einen der Reste

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Die Zahl $a^{2m} = (a^m)^2$ läßt daher bei Division durch 8 einen der Reste

0, 1, 4.

Dasselbe gilt für b^{2n} und c^{2k}. Also läßt $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k}$ bei Division durch 8 denselben Rest wie eine der Zahlen

$0 + 0 + 0 = 0$, $0 + 1 + 1 = 2$, $0 + 4 + 4 = 8$,
$0 + 0 + 1 = 1$, $0 + 1 + 4 = 5$,
$0 + 0 + 4 = 4$,

$1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 4 + 4 = 9$,
$1 + 1 + 4 = 6$,

$4 + 4 + 4 = 12$.

Für natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k läßt daher $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k}$ bei Division durch 8 niemals den Rest 7.

L 10;I

Da es aber unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, die bei Division durch 8 den Rest 7 lassen, ist hiermit der verlangte Beweis geführt.

Umlauft.

L 10;II XIX. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>191044) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

I. Angenommen, es gebe ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r. Es sei $\overline{AB} = c$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Dann ist nach einer bekannten Formel $F = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$ Ferner gilt, wie in der Aufgabe 191034 der Bezirksolympiade bewiesen wurde,

$\sin\gamma = \frac{c}{2r}$, also $r = \frac{c}{2\sin\gamma}$. Hieraus und aus $\sin\gamma = \frac{2F}{ab}$ folgt $r = \frac{abc}{4F}$. Nach dem Kosinussatz ist (1)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \qquad (1)$$

und darin (mit einem der beiden Vorzeichen) p (2)

$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \sin^2\gamma} = \pm\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 - 4F^2}$. Also kann eine Länge r nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn für sie die Gleichung

$$r = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2 - 4F^2}} \qquad (2)$$

(mit einem der beiden Vorzeichen) gilt. (3)

II. Umgekehrt folgt aus der Voraussetzung $0 < F \leq \frac{1}{2}ab$ für die gegebenen Werte a,b,F zunächst $a^2b^2 > a^2b^2 - 4F^2 \geq 0$, also existiert $\sqrt{a^2b^2 - 4F^2}$ und erfüllt $(0 \leq)\ \sqrt{a^2b^2 - 4F^2} < ab$. (1)
Daher ist

$$a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2 - 4F^2} \geq a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4F^2} > a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

also existiert auch jede der beiden in (2) angegebenen Längen. Erfüllt nun eine Länge r die Gleichung (2) mit einem der beiden Vorzeichen, so folgt weiter: Wegen $(0 \leq)\ \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 - 4F^2} < 1$ existiert γ mit $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ und

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 - 4F^2} \qquad (3)$$

(mit dem oberen oder unteren Vorzeichen je nachdem, ob in (2)

 Eind. Dreieck (2)

das obere oder untere Vorzeichen zutrifft). Hierzu existiert ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$; in diesem gilt (1) für $\overline{AB} = c$. Wegen $\sin\gamma > 0$ und (3) folgt weiter

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2b^2}(a^2b^2 - 4F^2)} = \frac{2F}{ab},$$

$$F = \frac{1}{2}ab \sin\gamma \;;$$

d. h. $\triangle$ ABC hat den gegebenen Wert F als Flächeninhalt. Aus (2), (3) und (1) folgt schließlich $r = \frac{abc}{4F}$, also ist die (durch (2) mit dem genannten Vorzeichen gegebene) Länge r auch der Umkreisradius von $\triangle$ ABC. Daher haben genau die durch (2) angegebenen Längen r die geforderte Eigenschaft. 3

191045) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, eine reelle Zahl x habe die genannten Eigenschaften.

Dann gilt $x^2 + 5x + 28 \geq 0$ und, wenn man $y = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ setzt, $y^2 - 24 = 5y$.

Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen $y = 8$ und $y = -3$, so daß eine der Gleichungen

$x^2 + 5x + 4 = 40$ bzw. $x^2 + 5x + 4 = -15$ folgt.

Von diesen beiden Gleichungen besitzt nur die erste reelle Lösungen, und zwar nur $x = -9$ und $x = 4$.

Also können höchstens diese beiden Zahlen die geforderten Eigenschaften haben. Sie haben diese Eigenschaften auch; denn es gilt

$$(-9)^2 + 5.(-9) + 28 = 64 > 0 \quad \text{bzw.} \quad 4^2 + 5.4 + 28 = 64 > 0,$$

also existiert für diese Zahlen x die Wurzel $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$, und es gilt

$$(-9)^2 + 5.(-9) + 4 = 40 = 5.8 = 5 \,.\sqrt{(-9)^2 + 5.(-9) + 28}$$

bzw.

$$4^2 + 5.4 + 4 = 40 = 5.8 = 5 \,.\sqrt{4^2 + 5.4 + 28}.$$

Daher erfüllen genau die Zahlen $x = -9$ und $x = 4$ die Bedingungen der Aufgabe.

191046) Lösung: 7 Punkte

Die vier Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge 2r.
Es sei Z der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d. h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge $h_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{6}$. Ist G der Flächeninhalt einer Seitenfläche, so hat das Tetraeder das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh_1$. Andererseits kann das Tetraeder in die vier kongruenten Tetraeder $M_1M_2M_3Z$, $M_1M_2M_4Z$, $M_1M_3M_4Z$ und $M_2M_3M_4Z$ zerlegt werden. Ist h die Länge des Lotes von Z auf eine Seitenfläche, so hat jedes dieser vier Tetraeder das Volumen $\frac{1}{3}Gh$. Daher gilt $4.\frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}Gh_1$, also $h = \frac{1}{4}h_1 = \frac{r}{\sqrt{6}}$, $r = h\sqrt{6}$.
Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders ABCD sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $M_1M_2M_3M_4$ im Abstand r, wobei die betreffenden Seitenflächen von ABCD jeweils durch die entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $M_1M_2M_3M_4$ von dem Punkt Z getrennt sind[1].
Daher hat Z von jeder Seitenfläche des Tetraeders ABCD den Abstand $h' = h + r = h(1+\sqrt{6})$, und ABCD entsteht aus $M_1M_2M_3M_4$ durch Streckung mit dem Zentrum Z und dem Faktor $h':h = 1+\sqrt{6}$.
Nach dem Strahlensatz hat somit ABCD die Kantenlänge $a' = 2r(1+\sqrt{6})$ und daher nach der Volumenformel für reguläre Tetraeder das Volumen

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{12} a'^3\sqrt{2} = \frac{2}{3} r^3\sqrt{2}\,(1+\sqrt{6})^3 \\ &= \frac{2}{3} r^3 \sqrt{2}\,(1+\sqrt{6})\,(1+\sqrt{6})^2 \\ &= \frac{2}{3} r^3 (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\,(7 + 2\sqrt{6}) \\ &= \frac{2}{3} r^3 (7\sqrt{2} + 14\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{2}) \\ &= r^3 \left(\frac{38}{3}\sqrt{2} + 12\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

---

1 Es kann auch als ausreichend angesehen werden, wenn statt derartiger verbal formulierter Lageaussagen die Lagebeziehungen z. B. aus Skizzen ersichtlich sind.