Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

191033) Lösung: 8 Punkte

Der Mittelpunkt M eines Würfels, d. i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.

Ist a die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von M zu den Ecken, d. h. der Umkugelradius $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von M zu den Seitenflächen, d. h. der Inkugelradius, ist $r_1 = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

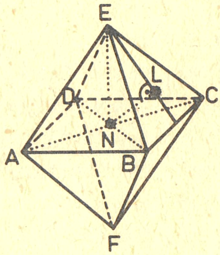
Weiter sei ABCDEF ein regelmäßiges Oktaeder (Abb. L 1033). Sein Mittelpunkt N, d.i. der Schnittpunkt von AC, BD und EF, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.

Ist b die Kantenlänge des Oktaeders, also $\overline{BD} = b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r = \overline{NB} = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: BCEN ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche BCE; für ihre Spitze N gilt $\overline{NB} = \overline{NC} = \overline{NE}$, also handelt es sich um eine gerade Pyramide. Der Fußpunkt L des Lotes von N auf die Fläche BCE ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $\overline{LE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Daraus und aus $NE = \frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, daß der Inkugelradius

$$r_2 = \overline{NL} = \sqrt{\overline{NE}^2 - \overline{LE}^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

ist. Somit gilt $r_1 : r_2 = 1 : 1$.

Abb. L 1033



XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>191034) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel

$$\overline{\sphericalangle AMB} = 2\gamma .$$

Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Es gilt $2\gamma \neq 180^\circ$.
   In dem gleichschenkligen Dreieck ABM ist die Höhe MD zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist Δ ADM bei D rechtwinklig; es gilt $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ und

   $$\overline{\sphericalangle AMD} = \gamma \quad \text{im Falle} \quad 2\gamma < 180^\circ$$

   bzw.

   $$\overline{\sphericalangle AMD} = 180^\circ - \gamma \quad \text{im Falle } 2\gamma > 180^\circ .$$

   Wegen $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

   $$\sin\gamma = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AB}}{2r} ,\ \text{w.z.b.w.}$$

2. Es gilt $2\gamma = 180^\circ$.
   Dann ist $\overline{AB} = 2r$,

   $$\sin\gamma = \sin 90^\circ = 1 = \frac{\overline{AB}}{2r},\ \text{w.z.b.w.}$$

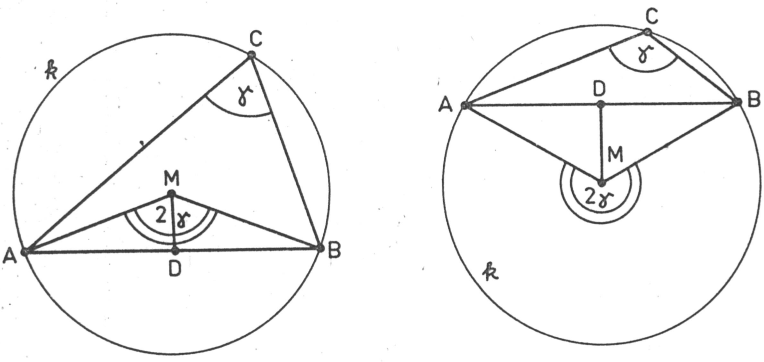


Abb. L 1034

191035) Lösung: 7 Punkte

Aus (1) und (3) folgt

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2\,,$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3\,,$$
$$f(5) = f(3+2) = f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5\,,$$
$$f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2) = 5 + 2 = 7\,.$$

Aus (2)* folgt daher

$$f(\tfrac{1}{7}) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7^2} \cdot 7 = \frac{1}{7}\,.$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f(\tfrac{2}{7}) = f(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7}) = f(\tfrac{1}{7}) + f(\tfrac{1}{7}) = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{2}{7}\,,$$
$$f(\tfrac{3}{7}) = f(\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7}) = f(\tfrac{2}{7}) + f(\tfrac{1}{7}) = \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{3}{7}\,,$$
$$f(\tfrac{5}{7}) = f(\tfrac{3}{7} + \tfrac{2}{7}) = f(\tfrac{3}{7}) + f(\tfrac{2}{7}) = \tfrac{3}{7} + \tfrac{2}{7} = \tfrac{5}{7}\,,$$ w.z.b.w.

---

* Hinweis: Möglich ist auch ein Beweis ohne Verwendung von (2):
Aus $7 \cdot f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7}) + \ldots + f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{7}) = f(1) = 1$
folgt $f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}$.

191036) Lösung: 7 Punkte

1. Möglichkeit: geometrische Interpretation:
Da nur quadratische Terme in den Radikanden auftreten und bei Vertauschung von (a+c) mit (a−c) wieder (1) entsteht, kann man sich auf positive a,b,c beschränken. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C (Abb. L 1036). AC habe die Länge a. Man trägt nun auf der Geraden durch B und C von B aus nach beiden Seiten je eine Strecke der Länge c ab und erhält die Punkte D und E. Ergänzt man das Dreieck EDA zu dem Parallelogramm EFDA, so gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= \sqrt{a^2 + b^2}\,, \\ \overline{DA} &= \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\,, \\ \overline{EA} &= \sqrt{(a+c)^2 + b^2}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Da B der Diagonalenmittelpunkt des Parallelogramms EFDA ist, gilt nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck AFD,

$$\overline{DA} + \overline{FD} \geqq 2\overline{BA}.$$

Wegen (2) und $\overline{FD} = \overline{EA}$ folgt daraus (1).

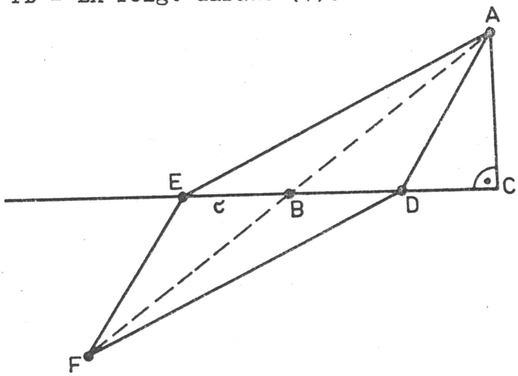


Abb. L 1036

2. Möglichkeit:

Es gilt

$$(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2$$
$$\geqq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = (a^2+b^2-c^2)^2.$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2} \geqq a^2+b^2-c^2 ,$$

also

$$a^2+2ac+c^2+b^2 +2\sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)} + a^2-2ac+c^2+b^2 \geqq$$
$$\geqq 4a^2+4b^2,$$
$$\left(\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right)^2 \geqq 4(a^2 + b^2).$$

(Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a\pm c)^2+b^2 \geqq 0$.)

Wegen $(a^2+b^2 \geqq 0$ und$)$ $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geqq 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geqq 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{, w.z.b.w.}$$

Hinweis zur Korrektur: Es liegt nahe, die Rechnungen in umgekehrter Reihenfolge anzuführen. Dann muß als Reihenfolge des logisch schließenden Vorgehens die des obigen Textes erkennbar gemacht werden. (Anders bei indirekter Beweisführung: Aus der Annahme, L 10;II

es wäre $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} < 2\sqrt{a^2+b^2}$, wird auf den Widerspruch ... $+2b^2c^2 < \ldots -2b^2c^2$ geschlossen.)

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

191031) Lösung: **6 Punkte**

a) Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die Gerade g durch C und M ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt

$$\overline{MD} = \overline{MJ}\ ,\ \overline{ME} = \overline{MH}\ ,\ \overline{MG} = \overline{MF}\ . \qquad (1)$$

Ferner ist CM zugleich Höhe in ABC, also hat $\triangle$ BCM bei B bzw. M Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $\overline{MB} = \overline{MC}$. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von BC; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von DE, hiernach gilt

$$\overline{MD} = \overline{ME}\ . \qquad (2)$$

$\triangle$ BCD ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{\sphericalangle DBC} = 45^\circ$, also ist $\overline{\sphericalangle DBM} = 90^\circ = \overline{\sphericalangle GBM}$; ferner gilt $\overline{BD} = a\sqrt{2} = \overline{BG}$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle$ DBM $\cong$ $\triangle$ GBM, also

$$\overline{MD} = \overline{MG}\ . \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt, daß der Kreis k um M durch D auch durch E, F, G, H, J geht.
Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

$$2\,\overline{MG} = 2\sqrt{\overline{MB}^2 + \overline{MG}^2} = 2\sqrt{\left(\tfrac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{4\left(\tfrac{a^2}{2} + 2a^2\right)} = a\sqrt{10}.$$

b) Zu zeigen ist, daß für jeden Punkt M' $\neq$ M jeder Kreis um M', der in seiner Fläche oder auf seinem Rande die Punkte D, E, F, G, H, J enthält, einen größeren Radius als k hat.
O.B.d.A. liege M' auf g oder in derjenigen durch g begrenzten Halbebene, die A enthält. Das Lot von M' auf g habe den Fußpunkt L.
Ist L = M (also M' nicht auf g gelegen), so gilt $\overline{M'D} > \overline{MD}$ (Abb. L 1031a)[1]. Ist L $\neq$ M und liegt L auf dem Strahl aus M

[1] Dieser Schluß braucht vom Schüler nicht genauer ausgeführt zu werden.

durch C, so gilt $\overline{M'G} \geq \overline{LG} > \overline{MG}$ (Abb. L 1031b)[1]. Liegt L auf der Verlängerung von CM über M hinaus, so gilt $\overline{M'D} \geq \overline{LD} > \overline{MD}$ (Abb. L 1031c)[1].

Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

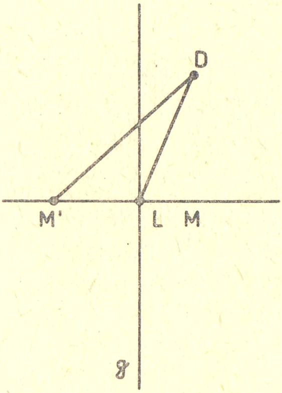


Abb. L 1031a

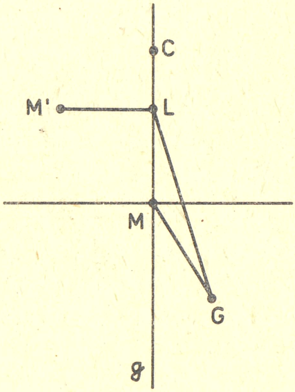


Abb. L 1031b

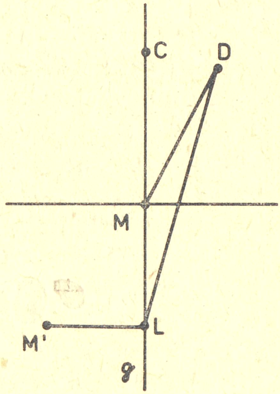


Abb. L 1031c

191032) Lösung: 6 Punkte

Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1 + x - 3y \geq 0 \qquad (2)$$

und

$$2x - 4y + 1 \geq 0 \qquad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geq 1 \qquad (4)$$

und

$$3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geq 1. \qquad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

$$1 + x - 3y = 0 \qquad (6)$$

und

$$2x - 4y + 1 = 0 \qquad (7)$$

gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x;y) = \left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right)$$

als Lösung.