Umlauf

L 10

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

191021) Lösung: 9 Punkte

Es sei 2a die Länge der kürzeren Seite des Bildes, dann ist 3a die Länge seiner längeren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens, dann sind 2a + 2d bzw. 3a + 2d die Längen der Außenkanten des Rahmens.

Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d. h. genau dann, wenn

$$(2a + 2d)(3a + 2d) = 2 \cdot 2a \cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2 + 4ad + 6ad + 4d^2 = 12a^2,$$

$$4d^2 + 10ad - 6a^2 = 0,$$

$$d^2 + \frac{5}{2}ad - \frac{3}{2}a^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}a^2 + \frac{24}{16}a^2},$$

von denen genau

$$d = -\frac{5}{4}a + \frac{7}{4}a = \frac{a}{2}$$

nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten die Längen $2a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 3a$ und $3a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 4a$ haben.

Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt: Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a + 2d) : (3a + 2d) = 3:4$, so folgt $8a + 8d = 9a + 6d$, also $2d = a$ und damit $d = \frac{a}{2}$.

Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

<u>Hinweis zur Korrektur</u>: Werden die einzelnen Lösungsschritte nicht als logische Äquivalenzen angeführt, sondern als Schluß von der Forderung auf den Wert 3:4 (oder auf die Längen 3a, 4a der Außenkanten selbst), so ist auch der umgekehrte Schluß erforderlich. Dabei ist, wenn man vom Verhältnis 3:4 ausgeht, hieraus und aus einer der beiden Forderungen (der Rahmen sei überall gleich breit, der Flächeninhalt des Rahmens sei gleich dem des Bildes) die andere als erfüllt nachzuweisen.

<u>191022) Lösung</u>: <u>10 Punkte</u>

Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bzw. 8,

so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest

0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4 bzw. 1;

d.h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7. Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.
   Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 0 + 4 = 4,\ 0 + 7 = 7,\ 1 + 4 = 5,\ 1 + 7 = 8,\ 4 + 7 = 11. \tag{1}$$

   Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß auch die beiden anderen Reste 0 sind; d.h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

$\left.\begin{matrix}2.\\3.\\4.\end{matrix}\right\}$ Fall: Einer der Reste ist $\left\{\begin{matrix}1\\4\\7\end{matrix}\right\}$.

Dann ergibt die Summe der beiden anderen Reste bei Division durch 9 den Rest $\left\{\begin{matrix}8\\5\\2\end{matrix}\right\}$. Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, daß die beiden anderen Reste $\left\{\begin{matrix}1 \text{ und } 7\\1 \text{ und } 4\\4 \text{ und } 7\end{matrix}\right\}$ lauten.

In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

<u>191023) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

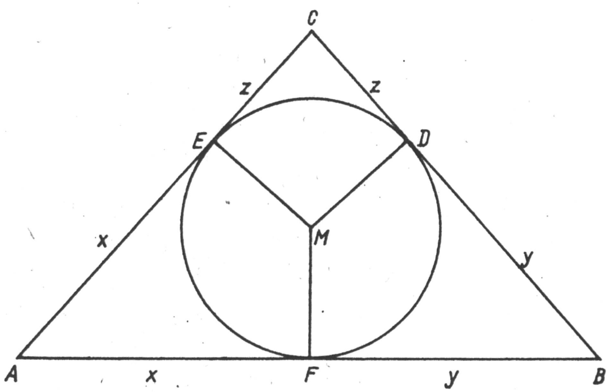

Abb. L 1023

L 10

Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.
Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $ME \perp AC$ und $MF \perp AB$. Weiter folgt $\triangle AEM \cong \triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $\overline{AM} = \overline{AM}$, $\overline{ME} = \overline{MF}$ und in der Größe $\overline{\sphericalangle AEM} = \overline{\sphericalangle AFM}$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist[1] $\overline{AE} = \overline{AF}$. Entsprechend läßt sich zeigen, daß $\overline{BF} = \overline{BD}$ und $\overline{CD} = \overline{CE}$ gilt.
Für die gesuchten Seitenabschnitte

$$\overline{AE} = \overline{AF} = x,\ \overline{BF} = \overline{BD} = y,\ \overline{CD} = \overline{CE} = z$$

gilt somit das Gleichungssystem

$$y + z = a, \qquad (1)$$
$$x + z = b, \qquad (2)$$
$$x + y = c. \qquad (3)$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Entsprechend ergibt sich

$$y = \frac{1}{2}(c + a - b),$$
$$z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Die gesuchten Längen[2] sind also

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{1}{2}(b+c-a),\ \overline{BF} = \overline{BD} = \frac{1}{2}(c+a-b),\ \overline{CD} = \overline{CE} = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

---

1) Die hier erhaltene Aussage, daß auf den Tangenten von einem Punkt A an einen Kreis die Strecken von A bis zu den Berührungspunkten einander gleichlang sind, kann auch als bekannter Satz zitiert werden.

2) Da die Existenz (des Inkreises und folglich auch) der gesuchten Längen als bekannt verwendet werden darf, ist eine Probe (oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x,y,z) nicht erforderlich.

L 10

191024) Lösung: 11 Punkte

Es seien M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da $M_4 M_2$ Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf $M_4 M_2$, und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M. Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC.

Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{\overline{M_4E}}{\overline{DM_3}} = \frac{\overline{AM_4}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}, \text{ oder } \overline{M_4E} = \frac{a}{4}, \ \overline{EM} = \frac{a}{4}$$

und

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{M_4M}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}, \text{ also } \overline{FM} = \frac{\overline{AM}}{3}.$$

Da AM die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $\overline{AM} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $\overline{MF} = \frac{a}{6}\sqrt{2}$.

Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2} \neq \frac{1}{4}$ folgt $\overline{ME} \neq \overline{MF}$ und hieraus nach der Seiten-Winkel-Relation $\overline{\sphericalangle MEF} \neq \overline{\sphericalangle MFE}$.

Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt

$\overline{\sphericalangle LEF} = 2\,\overline{\sphericalangle MEF}$ und $\overline{\sphericalangle EFG} = 2\,\overline{\sphericalangle MFE}$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\overline{\sphericalangle LEF} \neq \overline{\sphericalangle EFG}$. Da somit in dem Achteck EFGHIJKL zwei verschieden große Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

2. Lösungsweg:

Man zeigt $\triangle MEM_3 \cong \triangle MKM_4 \cong \triangle MEM_1$, $\overline{M_3M} : \overline{EM} = 2:1$ und folglich

$\overline{\sphericalangle M_3EM} = \overline{\sphericalangle M_4KM} = \overline{\sphericalangle M_1EM} = \varphi$ mit $\tan \varphi = 2$.

Daher ist einerseits $\overline{\sphericalangle FEL} = 2\varphi$, andererseits nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke, auf EMKL angewandt, $\overline{\sphericalangle ELK} = 270^\circ - 2\varphi$.
Wäre das Achteck regelmäßig, so folgte $2\varphi = 270^\circ - 2\varphi$, $\varphi \triangleq 67{,}5^\circ$.
Wegen $\tan 67{,}5^\circ \neq 2$ ist damit ein Widerspruch erreicht.

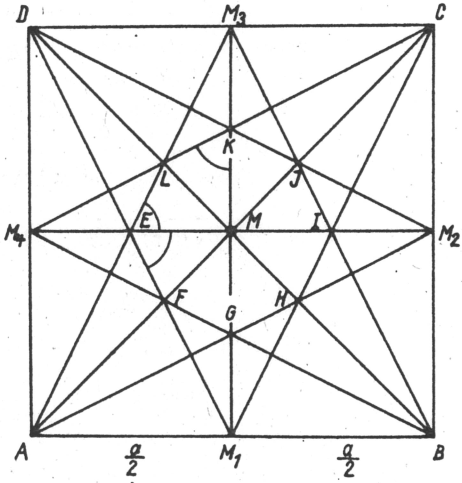

Abb. L 1024

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

191021

Angabe der Seitenlängen des Bildes mit Variablen	1 Punkt
Angabe der Kantenlänge des Rahmens mit Variablen	1 Punkt
Aufstellen der Gleichung $(2a+2d)(3a+2d) = 2\cdot 2a\cdot 3a$	2 Punkte
Normalform der quadratischen Gleichung	1 Punkt
ERmittlung von $d = 0{,}5\ a$	2 Punkte
Angabe der Kantenlängen des Rahmens	1 Punkt
Kontrolle	1 Punkt
	9 Punkte

191022

Ermittlung der möglichen Reste von Quadratzahlen bei Division durch 9	2 Punkte
Diskussion des Falles, daß eine der drei Zahlen durch 9 teilbar ist	2 Punkte
Diskussion der anderen Fälle	5 Punkte
Schlußfolgerung	1 Punkt
	10 Punkte

191023

Kongruenz der Tangentenabschnitte mit Begründung	2 Punkte
Aufstellen des Gleichungssystems	3 Punkte
Lösen des Gleichungssystems	3 Punkte
Angabe der gesuchten Größen	2 Punkte
	10 Punkte

191024

$\overline{M_4E} = \overline{EM} = \frac{a}{4}$	1 Punkt
Ähnlichkeit der Dreiecke M_4FM und AFB	2 Punkte
$\overline{FM} = \frac{\overline{AM}}{3}$	2 Punkte
$\overline{FM} = \frac{a}{6}\sqrt{2}$	2 Punkte
Schluß, daß $\overline{ME} \neq \overline{MF}$	2 Punkte
Schluß auf Verschiedenheit zweier Innenwinkel und Schlußfolgerung der Nichtregelmäßigkeit der Figur	2 Punkte
(für alle aufgeführten Teilschritte Angabe einschließlich Begründung)	11 Punkte