Kinlauft

L 9;I XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

190931) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, für ein Paar $(a;b)$ natürlicher Zahlen gelten (1) und (2). Dann ist die Lösung x (siehe (1)) nach (2) gleich der Zahl $ax-6$, d. h. es gilt

$$ax - 6 = x.$$

Daraus folgt

$$ax - x = 6,$$

$$x(a-1) = 6. \qquad (3)$$

Da $a-1$ eine ganze Zahl ist, ist die natürliche Zahl x ein Teiler von 6, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6.

Ebenso folgt aus (1), (2), daß

$$bx - 4 = x,$$

$$x(b-1) = 4 \qquad (4)$$

gilt, also x ein Teiler von 4 ist, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 4.

Somit kann x nur eine der Zahlen 1;2 sein.

Ist $x = 1$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 7$ und $b = 5$ gilt.

Ist $x = 2$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 4$ und $b = 3$ gilt.

Also können nur die Paare (4;3) und (7;5) die Bedingungen (1), (2) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn die Gleichung $4x-6=3x-4$ hat die Zahl 2 als Lösung, beim Einsetzen von 2 in $4x-6$ bzw. $3x-4$ ergibt sich ebenfalls 2; die Gleichung $7x-6=5x-4$ hat die Zahl 1 als Lösung, beim Einsetzen von 1 in $7x-6$ bzw. $5x-4$ ergibt sich ebenfalls 1. Daher erfüllen genau die Paare (4;3) und (7:5) die Bedingungen (1), (2).

190932) Lösung: 7 Punkte

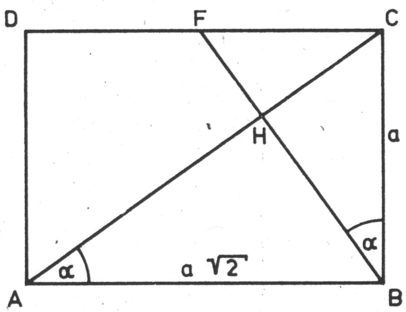


Abb. L 932

Der Schnittpunkt der Strecken AC und BF sei H genannt.

Wegen $\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a}$ gilt $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BC}}$.

Daher stimmen die Dreiecke ABC und BCF im Verhältnis zweier Seiten und in der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels überein und sind somit ähnlich.

Sei nun α die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$, dann gilt
$\overline{\sphericalangle FBC} = \alpha$, also $\overline{\sphericalangle ABH} = 90^\circ - \alpha$

und somit wegen des Satzes über die Winkelsumme, angewendet auf das Dreieck ABH,
$\overline{\sphericalangle AHB} = 90^\circ$, w.z.b.w.

2. Lösungsweg:

Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3},$$

$$\overline{BF} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\overline{HC} : \overline{HA} = \overline{CF} : \overline{AB} = 1 : 2,$$

also $\overline{HA} = 2\overline{HC}$. Hieraus und aus $\overline{HA} + \overline{HC} = \overline{AC}$ folgt
$3\overline{HC} = \overline{AC} = a\sqrt{3}$, also

$$\overline{HC} = \frac{a}{3}\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Ferner gilt

$$\overline{HF} : \overline{HB} = \overline{CF} : \overline{AB} = 1 : 2,$$

also $\overline{HB} = 2\overline{HF}$. Hieraus und aus $\overline{HB} + \overline{HF} = \overline{BF}$ folgt $3\overline{HF} = \overline{BF}$, also $\overline{HF} = \frac{1}{3}\overline{BF}$ und somit $\overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{BF}$, d. h.

$$\overline{HB} = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\,. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2 = 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 = \overline{BC}^2.$$

Somit ist das Dreieck BCH nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras bei H rechtwinklig, w.z.b.w.

190833) Lösung: 6 Punkte

Für den ersten Karton sind die Forderungen (1), (2) und (3) erfüllt. Wir beweisen nun: Hat man die Forderungen (1), (2) und (3) durch eine Anordnung A der Menge M_k aus den ersten k Kartons erfüllt (k sei eine beliebige der Zahlen 1, 2, ..., n-1), so kann man (1), (2) und (3) auch für die Menge M_{k+1} aus den ersten k+1 Kartons erfüllen. Ist dies bewiesen, dann ist daraus ersichtlich, wie man die Forderungen (1), (2) und (3) für die gesamte Menge der n Kartons schrittweise durch Hinzunehmen des zweiten, dritten, ... Kartons erfüllen kann.

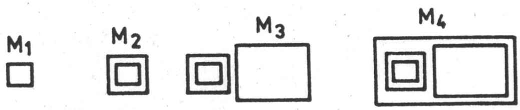
In der Anordnung A gibt es, da sie (2) erfüllt, entweder genau einen oder genau zwei Kartons, die in keinem anderen Karton der Menge M_k enthalten sind.

a) Gibt es genau einen solchen, so lege man den (k+1)-ten Karton einfach daneben. Dann bleiben (1) und (3) erfüllt, da der neue Karton die gerade Anzahl von 0 Kartons enthält und die Anordnung der übrigen unverändert bleibt. Ferner ist auch (2) erfüllt, da nun genau zwei Kartons in keinem anderen der Menge M_{k+1} enthalten sind.

b) Gab es aber in A genau zwei Kartons K und K', die in keinem anderen Karton der Menge M_k enthalten waren, so lege man die gesamte Anordnung A unverändert in den (k+1)-ten Karton hinein. Hierdurch wird, da (2) für A galt, (3) für den (k+1)-ten Karton erfüllt, und für die übrigen Kartons bleibt (3) gültig, da A unverändert geblieben war.

Ferner wird (2) erfüllt, da nun genau der neue Karton in keinen anderen der Menge M_{k-1} enthalten ist. Schließlich bleibt (1) aus folgendem Grunde erfüllt: Alle Kartons der früheren Anordnung A erfüllen (1); zu zeigen ist noch, daß auch der (k+1)-te Karton eine gerade Anzahl Kartons enthält. Dies ergibt sich wie folgt: Der Karton K enthält in der Anordnung A eine gerade Anzahl g von Kartons, der Karton K' eine gerade Anzahl g'. Daher enthält der (k+1)-te Karton in der neuen Anordnung genau diese g+g' Kartons zusammen mit K und K', d. h. genau g+g'+2 Kartons, und dies ist eine gerade Anzahl.

Abb. L 933: Anordnung der Menge M_k (k = 1, 2, 3, 4)



(Eine Abbildung wird vom Schüler nicht verlangt.)

<u>Hinweis zur Korrektur:</u>
Ein stärkeres Zurückgreifen auf die Anschauung als in dieser Textfassung sollte zugebilligt werden. Zu einer Anerkennung als vollständige Lösung müßte aber gehören, daß der Schüler (etwa nach anschaulicher Lösung für kleine k, k = 1, 2 ...) ein Verfahren deutlich gemacht hat, das für jede beliebige Anzahl zum Ziel führt. Lediglich eine Wendung wie "usw." reicht hierfür nicht aus.

Umlauf

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

190934) Lösung: 6 Punkte

a) Alle Mengen aus je drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, daß jede dieser drei Zahlen durch eine Ziffer des dekadischen Zahlensystems dargestellt wird, lauten
$\{0;1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{2;3;4\}$, $\{3;4;5\}$, $\{4;5;6\}$, $\{5;6;7\}$, $\{6;7;8\}$, $\{7;8;9\}$.
Jede im dekadischen Zahlensystem dreistellige Zahl, deren Ziffern in irgend einer Reihenfolge die Zahlen aus einer dieser Mengen darstellen, hat also eine der Quersummen
3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24
und ist folglich durch 3 teilbar. Daher ist keine dieser dreistelligen Zahlen eine Primzahl.

b) Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels. Für $n = 3$ gilt z. B.: Die Primzahl 11 (dekadisch geschrieben) hat im 3-adischen Zahlensystem wegen
$$11 = 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 + 2$$
die Ziffern 1,0,2, die in der Reihenfolge 0,1,2 drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen.

190935) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, ein Punkt Z habe die verlangte Eigenschaft. Dann ist $\overline{ZA} = \overline{ZA'}$ und $\overline{ZB} = \overline{ZB'}$, also liegt Z sowohl auf der Mittelsenkrechten von AA' als auch auf der Mittelsenkrechten von BB'.

II. Daher kann ein Punkt Z nur dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man konstruiert die Mittelsenkrechte von AA' und die Mittelsenkrechte von BB'. Da auf dem Arbeitsblatt AA' und BB' nicht zueinander parallel sind, sind auch diese beiden Mittelsenk-

rechten nicht zueinander parallel; sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der Z genannt sei.

III. Beweis, daß der so konstruierte Punkt Z die verlangte Eigenschaft hat:

Nach Konstruktion liegt Z auf den Mittelsenkrechten von AA' und von BB', also gilt

$$\overline{ZA} = \overline{ZA'} \qquad (1)$$

und

$$\overline{ZB} = \overline{ZB'}\ . \qquad (2)$$

Ferner gilt nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Daher ist $\triangle ZAB \cong \triangle ZA'B'$ (Kongruenzsatz sss), also

$$\overline{\sphericalangle AZB} = \overline{\sphericalangle A'ZB'}\ . \qquad (3)$$

Die Ausführung der Konstruktion auf dem Arbeitsblatt ergibt ferner: Die Strahlen aus Z durch A,B,A' und B' sind so gelegen, daß

$$\sphericalangle AZA' \text{ und } \sphericalangle BZB' \text{ gleichen Drehsinn} \qquad (4)$$

haben und daß $\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle AZB} + \overline{\sphericalangle BZA'}$ sowie $\overline{\sphericalangle BZB'} = \overline{\sphericalangle BZA'} + \overline{\sphericalangle A'ZB'}$ gilt, woraus wegen (3) auch

$$\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle BZB'} \qquad (5)$$

folgt.

Wegen (1) gibt es eine Drehung um Z, die A in A' überführt. Wegen (2), (4) und (5) führt diese Drehung auch B in B' über.

IV. Alle Konstruktionsschritte aus II sind bei der vorgegebenen Lage von A,B,A' und B' auf dem Arbeitsblatt eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt Z mit der verlangten Eigenschaft.

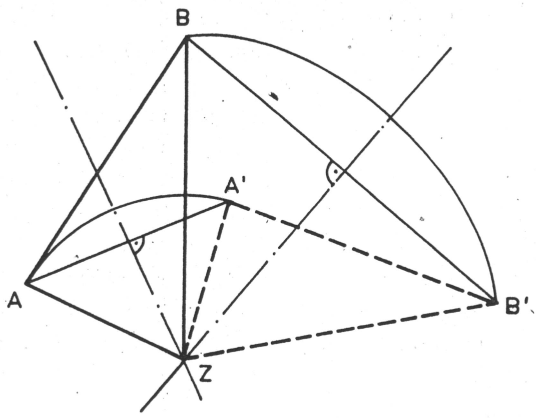


Abb. L 935

190936) Lösung: 7 Punkte

Jeder ebenflächig begrenzte Körper hat mindestens vier Ecken. Ist die Eckenzahl $n \leqq 5$, so gibt es nur folgende Fälle:

1. Der Körper hat genau 4 Ecken A, B, C, D.
   In diesem Fall hat der Körper die Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD als Begrenzungsflächen. Ihre Anzahl beträgt 4.

2. Der Körper hat genau 5 Ecken A, B, C, D, E, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen.
   Auch in diesem Fall muß jede ebene Fläche aus der Begrenzung des Körpers eine der Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE sein.
   Auf folgende Weise kann man ermitteln, wieviele dieser Dreiecksflächen (mindestens) in der Begrenzung der Körpers vorkommen:
   Jede Ecke des Körpers muß Ecke von mindestens 3 ebenen Begrenzungsflächen sein. Zählt man auf diese Weise die Flächen auf, wobei sich eine Anzahl $\geqq 15$ ergibt, so tritt jede Fläche in dieser Aufzählung genau dreimal auf, nämlich für jede ihrer Ecken genau einmal. Daher ist die Anzahl der Flächen (jede genau einmal gezählt) $\geqq 5$.

3. Der Körper hat genau 5 Ecken A, B, C, D, E, von denen vier, o.B.d.A. etwa A, B, C, D, in einer gemeinsamen Ebene liegen.
   In diesem Fall ist die Fläche des Vierecks ABCD eine der Begrenzungsflächen des Körpers. An jeder ihrer vier Kanten AB,BC,CD,DA muß sich eine weitere Fläche anschließen, wofür nur die Flächen der Dreiecke ABE bzw. BCE bzw. CDE bzw. DAE möglich sind. Damit sind 5 Flächen aus der Begrenzung des Körpers ermittelt.

Mithin gibt es für $n \leqq 5$ keinen Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen.
Für jedes gerade $n \geqq 6$, also $n = 2m$ mit ganzem $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen, nämlich z. B. ein Prisma mit m-eckiger Grund- und Deckfläche; denn wegen $m > 2$ gilt $2m > m+2$, also ist die Eckenzahl $n = 2m$ größer als die Zahl $m+2$ der Flächen.

Auch für jedes ungerade $n \geqq 6$, also $n = 2m + 1$ mit $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Um einen solchen zu erhalten, wähle man z. B. ein Prisma mit m-eckiger Grundfläche $A_1A_2A_3 \ldots A_m$ und m-eckiger Deckfläche $B_1B_2B_3 \ldots B_m$.

Ferner wähle man auf den Strecken A_1A_2 und A_2A_3 je einen Punkt P bzw. Q so, daß $A_1PQA_3 \ldots A$ ein $(m+1)$-Eck wird. Dann kann man von dem Prisma das Tetraeder B_2PQA_2 abschneiden und erhält einen Restkörper mit $n = 2m + 1$ Ecken und $(m + 2) + 1$ Flächen, der wegen $m > 2$, also $2m + 1 > m + 3$ die geforderte Eigenschaft hat.

Damit ist gezeigt, daß die Zahl $N = 6$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft hat und daß sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft ist.

Abb. L 936