XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>190831</u>

Klaus erzählt: "Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück."

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wieviel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur in der DDR gültige Münzen, d. h. Münzen zu 1, 5, 10, 20 und 50 Pf. sowie zu 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

<u>190832</u>

Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat ABCD, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenem k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

<u>190833</u>

Gegeben sei ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten

E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE bzw. GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks KJEH in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke AGHF, GBJK, KJEH und FECD untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks KJEH in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke AGHF, GBJK, KJEH und FECD untereinander umfangsgleich sind!

XIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

190834

Beweise, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die 3. Potenz der mittleren Zahl ergibt!

190835

Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, daß E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung

$$r^2 = \frac{ac}{4}$$

gilt!

190836

Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{km}{h}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{km}{h}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

190831) Lösung: **6 Punkte**

Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.
Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müßte die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.
Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.
Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

190832) Lösung: **7 Punkte**

I. Angenommen, ein Quadrat ABCD habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt M wegen $\overline{MA} = \overline{MD}$ auf der Mittelsenkrechten m von AD. Ferner berührt die Gerade t durch B, C den Kreis k in P, also ist t senkrecht zur Geraden durch M, P. Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf AD senkrecht und ist daher die Gerade m; damit ist gezeigt, daß m durch P geht. Da m auch Mittelsenkrechte von BC ist, ist folglich P der Mittelpunkt von BC. Wendet man auf ABCD eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum P an, so entsteht ein Quadrat A'B'C'D', dessen Ecken B', C' auf t liegen und dessen Seite B'C' den Mittelpunkt P hat.

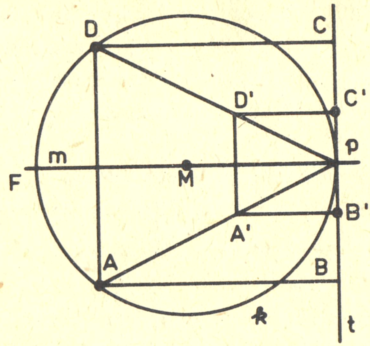

Abb. L 832

II. Daher ist ABCD nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(3) Man zieht durch M eine Gerade, die m genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit k bezeichne man mit P.

(4) Man konstruiert die Senkrechte t in P auf m.

(5) Auf t wählt man einen beliebigen Punkt B' $\neq$ P und verlängert die Strecke B'P über P hinaus um ihre eigene Länge bis C'.

(6) Auf B'C' errichtet man das Quadrat A'B'C'D' (nach der Seite von t hin, auf der k liegt).

(7) Die Strahlen aus P durch A' bzw. durch D' schneiden k in A bzw. D.

(8) Man fällt die Lote AB bzw. DC von A bzw. D auf t.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck ABCD ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:
Nach Konstruktion liegen A und D auf k, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade t, auf der B und C liegen, den Kreis k in P. Nach Konstruktion ist m die Mittelsenkrechte von B'C' und damit auch von A'D'. Daher liegen die Geraden durch P, A' bzw. durch P, B' symmetrisch zu m; dasselbe gilt für k und folglich für A und D. Somit ist AD $\perp$ m, also AD $\parallel$ A'D'. Da nach Konstruktion auch AB $\parallel$ A'B' und DC $\parallel$ D'C' ist, geht ABCD aus A'B'C'D' durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor. Folglich ist auch ABCD ein Quadrat, und die Seite BC wird von k in ihrem Mittelpunkt P berührt, so daß (2) insgesamt erfüllt ist.

IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat A'B'C'D', aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d. h. durch (k und) P eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für A, D und nach (8) für B, C.
Also gibt es (zu k) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

190833) Lösung: 8 Punkte

a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$. Daraus folgt $\overline{DF} = \frac{a^2}{4} : \overline{CD} = \frac{a}{4}$, $\overline{AF} = \frac{3a}{4}$, $\overline{FH} = \frac{a^2}{4} : \overline{AF} = \frac{a^2}{4} : \frac{3a}{4} = \frac{a}{3}$, $\overline{EH} = \frac{2a}{3}$, $\overline{EJ} = \frac{a^2}{4} : \overline{EH} = \frac{a^2}{4} : \frac{2a}{3} = \frac{3a}{8}$.
Also ist der gesuchte Umfang $2\overline{EH} = 2\overline{EJ} = \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{25a}{12}$.

b) Wir setzen $\overline{BJ} = x$, $\overline{KJ} = y$. Da die Rechtecke GBJK und KJEH umfangsgleich sind, ist $2(x+y) = 2(\overline{JE} + y)$, also $\overline{JE} = x$.
Da AGHF, GBJK und FECD umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von AGHF und GBJK gleich dem Umfang von FECD, also $\overline{FA} + \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{BJ} = 2(\overline{CD} + \overline{CE})$, d. h.

$$3x + a = 2(a + a - 2x).$$

Daraus folgt

$$x = \frac{3}{7}a.$$

Da AGHF und GBJK umfangsgleich sind, gilt $\overline{FA} + \overline{AG} = \overline{GB} + \overline{BJ}$, d. h.

$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{5}{7}a.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt

$$xy = \frac{15a^2}{49}.$$

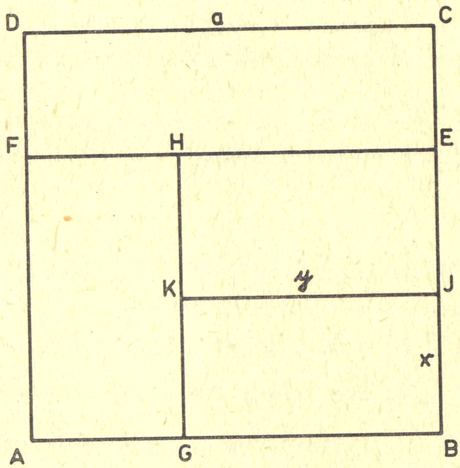

Abb. L 833

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

190834) Lösung: 5 Punkte

Ist x die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, x und $x+1$. Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man
$(x-1)\cdot x\cdot(x+1) + x = x^3 - x + x = x^3$, w.z.b.w.

190835) Lösung: 7 Punkte

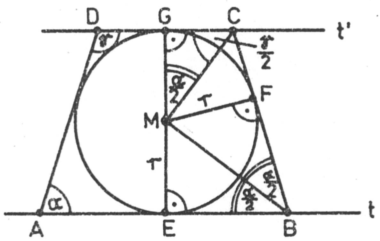

Abb. L 835

Der Mittelpunkt von k sei M. Bei Spiegelung an der Geraden durch E, G geht k in sich über, Ebenso t und t', und die Punkte A,B werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von A und B an k gelegten Tangenten und somit auch für D und C.
Daher ist G der Mittelpunkt der Strecke CD. Ferner folgt, daß im Trapez ABCD die Innenwinkel bei A und B beide dieselbe Größe α und die Innenwinkel bei C und D beide die Größe $\gamma = 180^\circ - \alpha$ haben (Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen).
Berührt k die Gerade durch B,C in F, so gilt $\triangle BEM \cong \triangle BFM$ (ssw), also $\overline{\sphericalangle EBM} = \overline{\sphericalangle FBM} = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\overline{\sphericalangle GCM} = \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, also $\overline{\sphericalangle GMC} = \frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CGM).
Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BME und MCG einander ähnlich, und es folgt

$$\overline{BE} : \overline{EM} = \overline{MG} : \overline{GC}, \text{ also}$$

$$\frac{a}{2} : r = r : \frac{c}{2} \quad \text{und somit}$$

$$r^2 = \frac{ac}{4}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

<u>190836) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a) Bei einer Geschwindigkeit von $30 \frac{km}{h}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30 \cdot \frac{1}{6}$ km = 5 km zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von $50 \frac{km}{h}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}$ h = $\frac{1}{10}$ h = 6 min benötigt.

Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von $50 \frac{km}{h}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4} \cdot 10 = 12,5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.

b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von $30 \frac{km}{h}$ eine Zeit von $\frac{12,5}{30}$ h = $\frac{5}{12}$ h = 25 min benötigt.

<u>2. Lösungsweg:</u>
Der in a) gesuchte Weg sei s, die Fahrzeit bei der Geschwindigkeit $v_1 = 30 \frac{km}{h}$ betrage t. Dann gilt

$$s = v_1 \cdot t \,.$$

Bei der Geschwindigkeit $v_2 = 50 \frac{km}{h}$ hätte die Fahrzeit $t - t_1$ (mit $t_1 = 10$ min $= \frac{1}{6}$ h) betragen, also gilt

$$s = v_2 \cdot (t - t_1).$$

Daraus fclgt

$$v_2 \cdot t - v_2 \cdot t_1 = v_1 \cdot t \,.$$

$$(v_2 - v_1) \cdot t = v_2 \cdot t_1,$$

wegen $v_2 - v_1 = 20 \frac{km}{h}$ also

$$t = \frac{50 \cdot 1}{20 \cdot 6}\text{ h} = \frac{5}{12}\text{ h} = 25\text{ min},$$

$$s = v_1 \cdot t = \frac{30 \cdot 5}{12}\text{ km} = 12,5\text{ km}.$$