A 8

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

190821

Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.

(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.

(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.

(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.

(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine "2".

(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine "2".

(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine "2".

Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wieviel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

190822

In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

"Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten..

Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!"

190823

In einem Parallelogramm ABCD sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, daß die beiden Parallelogramme EBHP und GPFD den gleichen Flächeninhalt haben!

190824

Klaus sagt: "Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120. Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte?"

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden?

Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

190821) Lösung: 9 Punkte

Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11 - 1 - 4 - 2 = 4$, daß genau 4 Schüler genau in Mathematik die Zensur 2 haben.
Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19 - 1 - 7 - 2 = 9$, daß genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur 2 haben.
Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, daß wegen $23-1 - 4 - 7 = 11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine "2" haben.
Wegen $4 + 9 + 11 = 24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur 2.
Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine 2 haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24 + 13 + 1 = 38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur 2.
Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur 2.

190822) Lösung: 10 Punkte

Die Anzahl der Mitglieder dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x. Dann nahmen im Juli 3x, im Februar 2x, im Januar $3x - 3$ und im August $x + 1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x - 2)$ Personen.
Nun gilt

$$20 < 10x - 2 < 35, \text{ also}$$
$$22 < 10x < 37.$$

Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x = 3$.
Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

30 07 58-1

190823) Lösung: 10 Punkte

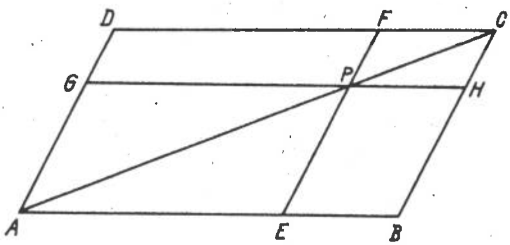

Abb. L 823

Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeninhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme ABCD, AEPG und PHCF an, so erhält man:
Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt;dieser sei A_3 genannt.Daher ergibt sich, daß sowohl das Parallelogramm EBHP als auch das Parallelogramm GPFD den Flächeninhalt $A_1-A_2-A_3$ haben.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

190824) Lösung: 11 Punkte

I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und n die erste Zahl ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4} + 2 = \frac{n}{4} + 3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.
Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n \leqq 12$, so wären $\frac{n}{2} + 2$ und $\frac{n}{4} + 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2} + 2 \leqq 8$ und $\frac{n}{4} + 3 \leqq 6$, also wäre ihr Produkt

$$n\cdot\left(\frac{n}{2} + 2\right)\cdot\left(\frac{n}{4} + 3\right) \leqq 12\cdot8\cdot6 = 576$$

und daher kleiner als 1120. Wäre $n \geqq 20$, so wäre $\frac{n}{2} + 2 \geqq 12$ und $\frac{n}{4} + 3 \geqq 8$, also das Produkt

$$n\cdot\left(\frac{n}{2} + 2\right)\cdot\left(\frac{n}{4} + 3\right) \geqq 20\cdot12\cdot8 = 1920$$

und daher größer als 1120.
Also kommt als erste Zahl nur n = 16, als zweite nur $\frac{n}{2} + 2 = 10$ und als dritte nur $\frac{n}{4} + 3 = 7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigenschaften wie die Bestätigung von $\frac{16}{2} + 2 = 10$, $\frac{10}{2} + 2 = 7$, $16 \cdot 10 \cdot 7 = 1120$ zeigt.
Also kann die Frage von Klaus eindeutig beantwortet werden. Er hat sich als erste Zahl 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

190821

Ermitteln der 4 Schüler, die in Mathematik Zensur 2 haben	1 Punkt
Ermitteln der 9 Schüler, die in Russisch die Zensur 2 haben	1 Punkt
Ermitteln der 11 Schüler, die in Deutsch eine 2 haben	1 Punkt
Ermitteln der 24 Schüler, die genau in einem der genannten Fächer die Zensur 2 haben	1 Punkt
Ermitteln der 13 Schüler, die genau in zwei Fächern eine 2 haben	1 Punkt
Erkennen, daß 1 weiterer Schüler hinzukommt	1 Punkt
Ermitteln der 38 Schüler, die in wenigstens einem Fach die Zensur 2 haben	2 Punkte
Schlußfolgerung, daß genau ein Schüler in den genannten Fächern keine Zensur 2 hat	1 Punkt
	9 Punkte

190822

Anzahl der Mitglieder, die im Mai Urlaub haben	1 Punkt
Urlauber im Juli	1 Punkt
Urlauber im Februar	1 Punkt
Urlauber im Januar	1 Punkt
Urlauber im August	1 Punkt
Anzahl der Personen	1 Punkt
$20 < 10x-2 < 35$	1 Punkt
$22 < 10x < 37$	1 Punkt
$x = 3$	1 Punkt
Anzahl der Mitglieder	1 Punkt
	10 Punkte

190823

Zerlegen des Parallelogrammes in 2 kongruente Dreiecke	2 Punkte
Erkennen, daß Flächeninhalt von	
$\triangle ABC = \triangle CDA$ gilt (A_1)	2 Punkte
$\triangle AEP = \triangle PGA$ " (A_2)	2 Punkte
$\triangle PHC = \triangle CFP$ " (A_3)	2 Punkte
Erkennen, daß Parallelogramm EBHP als auch das Parallelogramm GPFD den gleichen Flächeninhalt $A_1 - A_2 - A_3$ hat	2 Punkte
	10 Punkte

190824

1. Zahl n	1 Punkt
2. Zahl $\frac{n+4}{2}$	1 Punkt
3. Zahl $\frac{n}{4} + 3$	1 Punkt
n teilbar durch 4 mit Begründung	1 Punkt
$n \cdot (\frac{n}{2} + 2) \cdot (\frac{n}{4} + 3) \leqq 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$ und daher kleiner als 1120	2 Punkte
Untersuchen des Produktes mit $n = 20$, $\frac{n}{2} + 2 = 12$ und $\frac{n}{4} + 3 = 8$	
$n \cdot (\frac{n}{2} + 2) \cdot (\frac{n}{4} + 3) \geqq 20 \cdot 12 \cdot 8 = 1920$ und daher größer als 1120	2 Punkte
Erkennen, daß $n = 16$, $\frac{n}{2} + 2 = 10$, $\frac{n}{4} + 3 = 7$	2 Punkte
Schlußfolgerung	1 Punkt
	11 Punkte