A 7

XIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

190721

Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

190722

a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ die Gleichung

$$\overline{CD} = \overline{AD} \qquad (1)$$

gilt, dann gilt die folgende Aussage (2):

Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\sphericalangle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

30 07 58-1

190723

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d.h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

190724

Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit mußte er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt. Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellte der Kraftfahrer fest, daß er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hatte, die insgesamt von der Abfahrt in A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, daß der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgedrückt?
c) Wieviel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

190721) Lösung: **8 Punkte**

Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt:
(4) Hans ist mit Rita verheiratet.
Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt:
(5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.
Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt:
(6) Peter ist mit Erika verheiratet.
Aus (4), (5), (6) folgt schließlich:
(7) Klaus ist mit Simone verheiratet.
Damit ist gezeigt, daß für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

190722) Lösung: **10 Punkte**

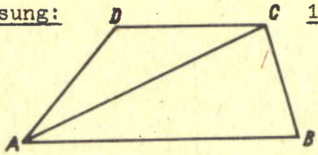

Abb. L 722

a) Wegen AB $\parallel$ CD sind $\sphericalangle$ ACD und $\sphericalangle$ CAB Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAB}. \quad (3)$$

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleichgroß, also gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAD}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}$, w.z.b.w.

30 07 58-1

b) Aus AB $\parallel$ CD folgt wie eben (3).
Wegen (2) gilt

$$\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}. \qquad (5)$$

Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; d.h., es gilt (1), w.z.b.w.

190723) Lösung: 10 Punkte

I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt:
Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a < 10$, also $a < 5$. Die folgende Tabelle enthält für die verbleibenden Möglichkeiten a = 1,2,3,4 die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z.

Hunderterziffer a	Zehnerziffer	Einerziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl z = 234 aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117 = 3 \cdot 39$ keine Primzahl ist.
Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, daß sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.

Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

190724) Lösung: 12 Punkte

a) Der Kraftfahrer benötigte wegen 20+30+12+4 = 66 bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.

L 7

b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66-30-4 = 32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40 : \frac{8}{15} = 75$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mithin $75 \frac{km}{h}$.

c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden benötigte, legte er dabei wegen $75 \cdot \frac{11}{10} = 82{,}5$ noch weitere 82,5 km zurück. Mithin hatte er von A nach B insgesamt 40 km + 82,5 km = 122,5 km zurückgelegt.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

190721

Schlußfolgerung aus (2) und (1)	1 Punkt
Hans ist mit Rita verheiratet (4)	1 Punkt
Schlußfolgerung aus (1) und (4)	1 Punkt
Dieter ist mit Gabi verheiratet (5)	1 Punkt
Schlußfolgerung aus (3), (4) und (5)	1 Punkt
Peter ist mit Erika verheiratet	1 Punkt
Schlußfolgerung aus (4), (5) und (6)	
Klaus ist mit Simone verheiratet (7)	1 Punkt
Nennen der Ehepaare	1 Punkt
	8 Punkte

190722

a) $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAB}$ (3)	2 Punkte
Erkennen, daß $\triangle ACD$ gleichschenklig ist (1)	1 Punkt
$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAD}$ (4)	1 Punkt
aus (3) und (4) $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}$	1 Punkt
b) Aus $AB \parallel CD$ folgt (3)	2 Punkte
Wegen (2) $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}$ (5)	1 Punkt
Aus (3) und (5) folgt (4), und es gilt (1)	2 Punkte
	10 Punkte

190723

$a \neq 0$	1 Punkt
$2a < 10$	1 Punkt
$a < 5$	1 Punkt
Erkennen der verbleibenden Möglichkeiten für a = 1, 2, 3, 4	2 Punkte
Aussondern von 2, 3, 4 mit Begründung	2 Punkte
122, 346 und 458 erfüllen die Bedingungen (1) bis (4)	2 Punkte
Zusammenfassung	1 Punkt
	10 Punkte

190724

a) Ermitteln der Zeit bis zur Abfahrt von der Bahnschranke	1 Punkt
Fahrzeiten von der Bahnschranke und nach B sind gleich lang	2 Punkte
Ankunftszeit in B	1 Punkt
b) Ermitteln der Fahrzeit von 32 Minuten	1 Punkt
Umrechnen von 32 Minuten in 8/15 Stunden	1 Punkt
Ermitteln der Durchschnittsgeschwindigkeit	2 Punkte
c) Ermitteln der Zeit für den Rest des Weges	2 Punkte
Ermitteln des zurückgelegten Weges von 82,5 km	1 Punkt
Weg von A nach B 40 km + 82,5 km = 122,5 km	1 Punkt
	12 Punkte