kleinsaft

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

181241) Lösung: 6 Punkte

Durch Polynomdivision erhält man: Für alle reellen x gilt

$$\left.\begin{aligned} f(x) = {} & g(x).(x^9-x^8+x^7+(-a+2)x^6+(a-2)x^5+(a-4)x^4+(a^2-4a+4)x^3 + \\ & +(-a^2+8)x^2 +(-3a^2+12a-8)x+(-a^3+6a^2 - 4a - 5)) \\ & +(\underline{a^3+6a^2-32a+15})x^2+(\underline{5a^3-24a^2+16a+33})x+\underline{a^4-6a^3+4a^2+5a+30}. \end{aligned}\right\} 2P.$$

Daher hat[1] eine ganze Zahl a genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn für sie die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^3 + 6a^2 - 32a + 15 &= 0, && (1) \\ 5a^3 - 24a^2 + 16a + 33 &= 0, && (2) \\ a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 &= 0 && (3) \end{aligned}\right\} 1P.$$

gelten.

Angenommen, eine ganze Zahl a erfüllt (1), (2), (3). Dann folgt $a \mid 33$ und $a \mid 30$, also $\underline{\underline{a \mid 3}}$, d. h. a ist eine der Zahlen 1, -1, 3, -3. Wegen 1P

$$\begin{aligned} 1^3 + 6.1^2 - 32.1 + 15 &= -10, \\ (-1)^3+6.(-1)^2-32.(-1)+15 &= 52, \\ (-3)^3+6.(-3)^2-32.(-3)+15 &= 138 \end{aligned}$$

verbleibt nur die Möglichkeit $\underline{a = 3}$. *höchst.* 1P

In der Tat erfüllt a = 3 die Gleichungen (1), (2), (3).

Daher hat genau die Zahl a = 3 die geforderten Eigenschaften. 1P

genau

Andere Lösungswege:[2]

A) Man setzt $f(x) = g(x).(a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_1x + a_0)$ an und ermittelt durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

---

1 Hier werden folgende Sätze benutzt:

1. Polynome h(x) und q(x), mit denen f(x) = g(x).h(x) + q(x) für alle reellen x gilt und q(x) entweder für alle reellen x gleich 0 oder von kleinerem Grade als g(x) ist, sind eindeutig bestimmt.
2. Es gilt $a_2x^2+a_1x+a_0$ für alle reellen x genau dann, wenn $a_2=a_1=a_0=0$ ist.

2 Hier wird man zum Teil mit weniger Hilfsmitteln auskommen, als in Anmerkung 1 angegeben wurde.

Bedingungen für $a_9, \ldots, a_0$. Diese sind genau dann erfüllbar, wenn (1), (2), (3) gelten.

B) Man bildet die Gleichung $f(x) = g(x).h(x)$ für kleine ganzzahlige x und erhält Teilbarkeitsbedingungen für a.

181242) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, die zu beweisende Aussage wäre falsch. Dann gäbe es einen Straßenabschnitt, etwa vom Posten P zum benachbarten Posten Q, so daß nach Sperrung des Abschnitts PQ folgendes gelten würde:

Es gibt zwei Verkehrsposten X und Y derart, daß Y von X aus nicht auf einem aus ungesperrten Abschnitten zusammengesetzten Gesamtweg von weniger als 300 km Länge zu erreichen ist.
Andererseits gibt es aber nach Voraussetzung (mindestens) einen Gesamtweg von X nach Y aus ungesperrten Abschnitten; unter diesen Wegen sei w ein möglichst kurzer. Da auch w nach Annahme mindestens 300 km lang ist, so gibt es auf w einen Punkt S, der 100 km von X, und einen Punkt T, der 100 km von Y entfernt ist, und es folgt: Einerseits ist auf w jeder Punkt zwischen S und T sowohl von X als auch von Y mehr als 100 km entfernt; andererseits beträgt die auf w gemessene Entfernung zwischen S und T mindestens 100 km. Also gibt es auf w zwischen S und T einen Verkehrsposten Z. (Beweis: Sonst führte ein Straßenabschnitt q von einem Posten A, der von S aus als nächster erreichbar[1] ist, zu einem Posten B, der von T aus als nächster erreichbar[1] ist, über die auf w zwischen S und T gelegenen Punkte. Längs dieses Abschnitts q wären A und B benachbart, aber q betrüge mindestens 100 km, im Widerspruch zur Voraussetzung.)
Vor der Schließung des Abschnitts PQ muß eine Verbindung w_x zwischen X und Z existiert haben, die kürzer als 100 km ist. Nach Sperrung von PQ kann es diese Verbindung nicht mehr geben; denn sonst wäre der Weg w, der ja von X über mindestens 100 km nach Z und dann nach Y führt, nicht möglichst kurz. Also muß PQ ein Teil des Weges w_x sein; o.B.d.A. sei die Bezeichnung so gewählt, daß w_x

---

1 Einschließlich der Möglichkeit A = S (bzw. B = T), falls nämlich S (bzw. T) selbst Posten ist.

von X auf einem Teilweg[1] a aus ungesperrten Abschnitten nach P, dann auf dem Abschnitt PQ nach Q und dann auf einem Teilweg b aus ungesperrten Abschnitten nach Z führt.
Entsprechend muß eine Verbindung w_y zwischen Y und Z existiert haben, die kürzer als 100 km ist und ebenfalls PQ enthält. Die Verbindung w_y muß somit entweder von Y auf einem Teilweg c aus ungesperrten Abschnitten nach P, dann auf dem Abschnitt PQ nach Q und dann auf einem Teilweg d aus ungesperrten Abschnitten nach Z führen (Abb. L 1242a) oder aber von Y auf auf einem Teilweg e aus ungesperrten Abschnitten nach Q, dann auf PQ nach P und dann auf einem Teilweg f aus ungesperrten Abschnitten nach Z (Abb. L 1242b).

Im ersten Fall stellen a,c, im zweiten Fall a,f,b,e einen Weg von X nach Y dar, der sich jeweils nur aus ungesperrten Teilstrecken von w_x und w_y zusammensetzt, also kürzer als 200 km ist.
Damit ist ein Widerspruch zu der Aussage erreicht, w sei ein möglichst kurzer Weg von X nach Y aus ungesperrten Abschnitten. Somit ist die zu beweisende Aussage als wahr nachgewiesen.

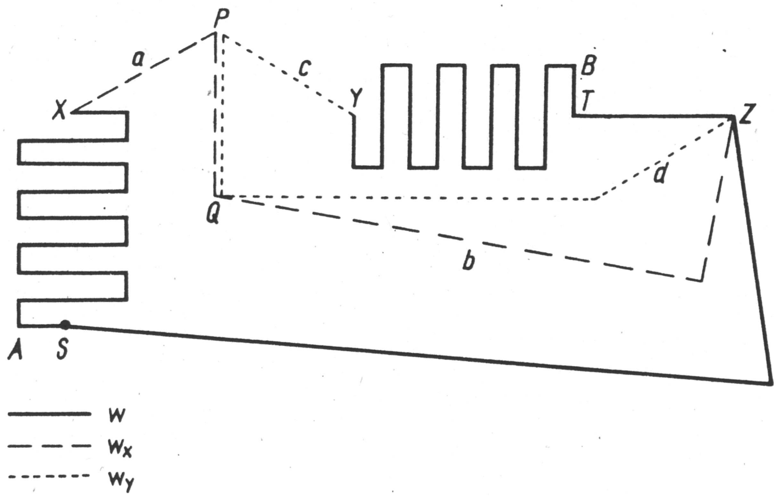

Abb. L 1242a

1 Für a ist auch (im Falle X=P) die Länge 0 zugelassen. Entsprechendes gilt für die folgenden b,c,d,e,f.

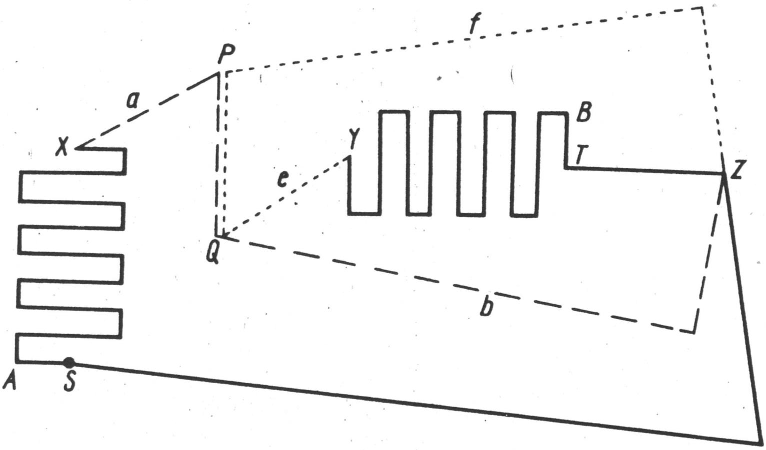

Abb. L 1242b

Hinweis zur Korrektur: Vom Schüler werden Abbildungen nicht verlangt; auch können sie, wie bewiesen, nicht alle im Text ausgesagten Eigenschaften haben.

181243) Lösung: 7 Punkte

(a) Angenommen, es gäbe ein Q_i, etwa Q_1, das nicht Ecke von E ist. Da E konvex ist und alle Q_i im Innern oder auf dem Rande von E liegen, liegen auch alle Punkte aller Seiten von $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ im Innern oder auf dem Rande von E. Dasselbe gilt folglich für alle Punkte im Innern von $Q_1Q_2 \ldots Q_n$.
Nun zeigen wir, daß eine Seite s von $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ innere Punkte von E enthält:
Liegt Q_1 im Innern von E, so ist diese Behauptung richtig. Liegt Q_1 auf dem Rande von E, also nach Annahme im Innern einer Seite r von E, so liegt mindestens einer der Punkte Q_n, Q_2 nicht auf r, da sonst $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ kein n-Eck wäre. O.B.d.A. liege Q_2 nicht auf r.

Jeder Punkt im Innern der Seite $s=Q_1Q_2$ liegt dann ebenfalls nicht auf r und folglich, da Q_1 im Innern von r liegt und die gesamte Strecke s zu E gehört, im Innern von E.
Die Gerade g, auf der s liegt, zerlegt folglich E in zwei Vielecke V_1, V_2 mit positiven Flächeninhalten F_1, F_2.

Das n-Eck $Q_1Q_2...Q_n$ liegt nun einerseits wegen der Konvexität ganz auf einer Seite von g. Andererseits aber liegen alle Punkte von $Q_1Q_2...Q_n$ im Innern oder auf dem Rande von E; sie liegen also bei geeigneter Bezeichnung sämtlich im Innern oder auf dem Rande von V_1. Der Flächeninhalt von $Q_1Q_2...Q_n$ ist daher mindestens um F_2 kleiner als der von E. Dies widerspricht der Kongruenz von E und $Q_1Q_2...Q_n$; die eingangs gemachte Annahme muß daher falsch sein.

(b) Es gibt solche nicht-konvexen n-Ecke. Zum Beweis genügt ein Beispiel, etwa folgendes:
Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D mit dem Mittelpunkt M, und P_4 liege auf der Verlängerung der Strecke P_2M über M hinaus, aber noch im Innern von D. Bei derjenigen Drehung um M, die P_1 in den Punkt $Q_1=P_2$ überführt, gehen P_2,P_3 in $Q_2 = P_3$ bzw. $Q_3 = P_1$ über, ferner P_4 in einen auf der Verlängerung der Strecke P_3M über M hinaus gelegenen Punkt Q_4 im Innern von D, der daher ebenfalls im Innern von $P_1P_2P_3P_4$ liegt, aber keine Ecke dieses Vierecks ist. Das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist also ein nicht-konvexes n-Eck, für das die Aussage (1) falsch ist.

(c) Nein. Zum Beweis genügt ein Gegenbeispiel, etwa folgendes:
Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D und P_4 sein Mittelpunkt.
Liegen nun alle Ecken $Q_1,..,Q_4$ eines zu $E = P_1P_2P_3P_4$ kongruenten Vierecks im Innern oder auf dem Rande von E, so folgt: Bei geeigneter Bezeichnung ist $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ein zu D kongruentes Dreieck und Q_4 sein Mittelpunkt. Da Q_1,Q_2,Q_3 erst recht im Innern oder auf dem Rande von D liegen, folgt nach (a): Jedes Q_i $(i = 1,2,3)$ ist eines der P_j $(j = 1,2,3,)$. Das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ ist also sogar dasselbe Dreieck wie D, und daher stimmt sein Mittelpunkt Q_4 mit dem Mittelpunkt P_4 von D überein. Daher ist die Aussage (1) für E wahr.

S. 3+4 fehlt
[illegible]

L 11/12;II

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

181244) Lösung: 5 Punkte

(I) Es wird bewiesen, daß die Behauptung für den kleinstmöglichen Wert 2 von m und alle zugehörigen Werte von n zutrifft:
Als zugehörigen Wert gibt es genau n=1, und in der Tat gilt einerseits

$$s(2,1) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{1} |i-j| = \sum_{i=1}^{2} |i-1| = 0 + 1 = 1,$$

andererseits

$$\frac{1}{3}(1-1).1.(1+1) + \frac{1}{2}.2.1.(2-1) = 1.$$

1 P.

(II) Für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für m = k und alle zugehörigen Werte von n die Richtigkeit der Behauptung für m = k+1 und alle zugehörigen Werte von n folgt:
Für die zu m = k+1 gehörigen Werte von n gilt $k+1 > n$, also $k \geqq n$.
Fallunterscheidung:

2 P.

1. Fall: $k > n$.
Es gilt

$$s(k+1, n) = \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n} |i-j| = s(k,n) + \sum_{j=1}^{n} |k+1-j|$$

$$= s(k,n) + \sum_{j=1}^{n} (k+1-j)$$

$$= s(k,n) + \frac{k+(k+1-n)}{2} . n$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}kn\,(k-n) + \frac{1}{2}(2k+1-n)n$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}n\,(k+1)\,(k+1-n),$$

wie behauptet.

2 P.

2. Fall: $k = n$.

Es gilt einerseits

$$s\,(k+1),\, k) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k} |i - j|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |i - j| + \sum_{j=1}^{k} |k+1 - j|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |i-j| + |i-k| \right) + \sum_{j=1}^{k} |k+1 - j|$$

$$= s\,(k,\, k-1) + \sum_{i=1}^{k} (k-i) + \sum_{j=1}^{k} (k+1 - j)$$

$$= \frac{1}{3}\,(k-2)\,(k-1)\,k + \frac{1}{2}\,k\,(k-1).\,1 + \frac{1}{2}\,k\,(k-1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,k\,(k+1)$$

$$= \frac{1}{6}\,k\,(2k^2 + 3k + 1) = \frac{1}{6}\,k\,(2k+1)\,(k+1);$$

andererseits erhält man für $m = k+1$ und $n = k$ auch

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1).1$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k-2+3) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

unvollständig

<u>181245)Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Es sei j eine beliebige der Zahlen $1,2,\ldots,n$.

<u>1. Fall:</u> Es existiert ein Primteiler p_j von a_j mit $p_j \geqq n$.

Angenommen, es existierte auch ein $k \neq j$ mit $0 < k \leqq n$ derart, daß a_k durch p_j teilbar wäre. Dann teilte p_j auch $|a_k - a_j|$ und damit auch $|k-j|$. Wegen $k \neq j$ und $0 < j,k \leqq n$ ist aber $0 < |k-j| < n$; und p_j $(\geqq n)$ kann nicht Teiler einer positiven Zahl sein, die kleiner als n ist. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme falsch war; d. h., p_j besitzt die behauptete Eigenschaft.

<u>2. Fall:</u> Alle Primteiler von a_j sind kleiner als n.

Dann ist

181345

Lösung: Es sei j eine der Zahlen 1, 2, ..., n.
1. Fall: Es existiert ein Primteiler p_j von a_j mit $p_j \geqq n$. Wir beweisen, daß dieser Primteiler kein weiteres a_k $(k \neq j)$ teilt. Angenommen, es existiert ein $K \neq j$, $0 < K \leqq n$ derart, daß p_j auch a_k teilt. Dann würde p_j aber auch $a_k - a_j = K - j$ teilen, was wegen $|k - j| < n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $p_j \geqq n$ steht.

2. Fall: Sämtliche Primteiler von a_j sind kleiner als n. Dann beweisen wir, daß j eine Primzahl ist, die den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dazu sei

$$q = \frac{a_j}{j} = \frac{n!}{j} + 1$$

eine ganze Zahl, für die folgendes gilt: q ist größer als 1 und besitzt daher Primteiler, die, da q ein Teiler von a_j ist, sämtlich kleiner als n sind. Diese Primteiler können keine der Zahlen m mit $1 < m < n$ und $m \neq j$ sein, da m ein Teiler von $\frac{n!}{j}$, also keiner von $\frac{n!}{j} + 1$ wäre. Dann muß aber j Primteiler von q und damit von a_j sein. Demnach kann nur $a_j = j^r$ mit $r \geqq 2$ gelten. Es bleibt zu zeigen, daß für kein K mit $0 < K \leqq n$ und $K \neq j$ die Primzahl j Teiler von a_k ist. Angenommen also, ein solches K existierte. Wie im ersten Fall müßte dann j auch Teiler von $K - j$ und damit von K sein, d. h., es existiert eine ganze Zahl g mit $K = g \cdot j$. Es ist $j < g \cdot j \leqq n$, also $g \cdot j$ Teiler von $\frac{n!}{j}$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß j die Zahl $q = \frac{n!}{j} + 1 = j^{r-1}$ teilt.

Aus (3) folgt ferner $-55x+4z \leqq -4$, hieraus und aus (1) folgt
$5z \leqq 50$, $z \leqq 10$. (9)

[Wählt man in (1), (2), (3), (4) überall das Gleichheitszeichen, so führt das zu dem eindeutig bestimmten im folgenden betrachteten Tripel:][1]
Das Tripel $(x_0,y_0,z_0) = (0{,}8;\ 0{,}8;\ 10)$ erfüllt nun, wie man durch Einsetzen bestätigt, alle Ungleichungen (1) bis (5); und es gilt

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0{,}8^2 + 0{,}8^2 + 10^2 = 101{,}28. \qquad (10)$$

Weiterhin hat für jedes Tripel $(x,y,z) \in M$ die durch

$$z = 10 - w \qquad (11)$$

definierte Zahl w wegen (9), (5) die Eigenschaft

$$0 \leqq w \leqq 11; \qquad (12)$$

ferner folgt aus (1) und (11)

$$55x \leqq 54-z = 44+w, \qquad x \leqq \frac{44+w}{55}.$$

Entsprechend folgt aus (2) und (11)

$$y \leqq \frac{44+w}{55}.$$

Hiernach und wegen $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ (s. (7), (8)) gilt für jedes $(x,y,z) \in M$

$$f(x,y,z) \leqq \left(\frac{44+w}{55}\right)^2 + \left(\frac{44+w}{55}\right)^2 + (10-w)^2$$

$$\leqq \frac{1}{55^2}(2.(1936 + 88w + w^2(+ 3025.(100 - 20w + w^2))$$

$$\leqq \frac{1}{55^2}(306372 + w(3027\,w - 60324)).$$

Aus (12) folgt aber

$$3027w - 60324 \leqq 3027.11 - 60324 < 0,$$

$$w(3027w - 60324) \leqq 0 \qquad \text{und damit}$$

$$f(x,y,z) \leqq \frac{306372}{55^2} = 101{,}28 \qquad (13)$$

Nach (10) und (13) hat also (x_0,y_0,z_0) die in der Aufgabe genannte Eigenschaft, und zwar ist $f(x_0,y_0,z_0) = 101{,}28$.

b) Sind nun x,y,z ganzzahlig und gelten (1) bis (5), also auch (7), (8), so muß wegen (7) entweder $x=0$ oder $x=1$ gelten. Entsprechend muß wegen (8) entweder $y=0$ oder $y=1$ sein.

---

1 Die Angabe dieser heuristischen Hinführung ist zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich.

Ist $x=0$, so folgt aus (3), daß $4z \leqq -4$, $z \leqq -1$, wegen (5) also $z = -1$ gilt. Ist $x=1$, so folgt aus (1), daß $z \leqq 54-55 \leqq -1$, also gleichfalls $z = -1$ gilt. Daher gibt es höchstens die folgenden ganzzahligen Tripel, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind: $(0,0,-1)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$, $(1,1,-1)$. Sie erfüllen in der Tat diese Ungleichungen; ferner gilt

$$f(0,0,-1) = 1,\quad f(0,1,-1) = f(1,0,-1) = 2,\quad f(1,1,-1) = 3.$$

Also hat das Tripel $(x_1,y_1,z_1) = (1,1,-1)$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft, und zwar ist $f(x_1,y_1,z_1) = 3$.