Umlauf

L 11/12;I

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

181231) Lösung: 6 Punkte

Zunächst wird gezeigt, daß kein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

vom Grad $n \geqq 3$ mit $a_n \neq 0$ die geforderte Eigenschaft haben kann. Für jedes solche Polynom ist nämlich in

$$f(x+1)-f(x) = a_n((x+1)^n - x^n) + a_{n-1}((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \ldots + a_1((x+1)-x) \quad (1)$$

jeweils

$$(x+1)^i - x^i \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

(nach Entwicklung von $(x+1)^i$ und nach Zusammenfassen) ein Polynom, das x^{i-1} als höchste Potenz mit von 0 verschiedenem Koeffizienten enthält, und daher kommt insgesamt in (1) die Potenz x^{n-1} als höchste Potenz mit von 0 verschiedenem Koeffizienten vor. Also kann (1) nicht für alle reellen x gleich dem Polynom x+1 sein (das wegen $n \geqq 3$ bei x^{n-1} den Koeffizienten 0 hat), da Polynome nur dann für alle reellen x übereinstimmen, wenn sie gliedweise (d. h. in ihren Koeffizienten jeweils bei der gleichen Potenz von x) übereinstimmen.

Somit können nur Polynome

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

die verlangte Eigenschaft haben. Ein solches Polynom hat wegen

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a_2(x^2 + 2x + 1) + a_1(x+1) + a_o - a_2 x^2 - a_1 x - a_o \\ &= 2a_2 x + a_2 + a_1 \qquad (2) \end{aligned}$$

genau die geforderte Eigenschaft, wenn (2) gliedweise mit x+1 übereinstimmt, d. h. genau dann, wenn a_2, a_1, a_o reelle Zahlen sind, die die Gleichungen

$$2a_2 = 1,$$
$$a_2 + a_1 = 1$$

erfüllen. Diese sind äquivalent mit

$$a_2 = \frac{1}{2},$$
$$a_1 = \frac{1}{2}.$$

Daher sind genau alle Polynome

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + a_o$$

(mit beliebigem reellem a_o) die gesuchten.

Hinweis zur Korrektur: Zusätze der Art, wie sie hier in Klammern eingefügt sind, werden vom Schüler nicht verlangt.

181232) Lösung: 6 Punkte

(1) Die Strecke AB habe nichtleeren Durchschnitt[1] mit ε.
Für jeden Punkt C auf ε, der zu diesem Durchschnitt gehört, d. h., der auf der Strecke AB liegt, gilt $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$. Für jeden Punkt C auf ε dagegen, der nicht auf der Strecke AB liegt, gilt $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$. Liegt ein solcher Punkt C nämlich auf der Verlängerung von BA über A hinaus, so gilt sogar $\overline{BC} > \overline{AB}$; liegt C auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so gilt sogar $\overline{AC} > \overline{AB}$; liegt aber C nicht mit A, B auf derselben Geraden, so besagt die Dreiecksungleichung, daß $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$ gilt.
Daher haben im Falle (1) genau alle Punkte C des Durchschnitts von ε mit der Strecke AB die geforderte Eigenschaft.

(2) Die Strecke AB habe keinen Punkt mit ε gemeinsam.
Durch Spiegelung von A an ε entstehe A'. Dann gilt einerseits für jeden Punkt C, der auf ε liegt, $\overline{A'C} = \overline{AC}$. Andererseits hat nun die Strecke A'B genau einen Schnittpunkt mit ε. Wendet man daher (1) auf A'B an, so folgt: Im Falle (2) hat genau der Schnittpunkt C von ε mit der Strecke A'B die geforderte Eigenschaft.

1) Falls A und B auf ε liegen, ist dieser Durchschnitt die gesamte Strecke AB, anderenfalls besteht er aus genau einem Punkt.

181233) Lösung: 8 Punkte

Angenommen, für 50 derartige Teilmengen M_i seien (1),(2),(3) erfüllt. Dann folgt:

Für jedes $k = 1,\dots,50$ bezeichne N_k die Menge aller derjenigen Elemente von M, die die Eigenschaft haben, Element von genau k verschiedenen unter den Mengen M_i zu sein. Enthält jeweils N_k genau n_k Elemente, so gilt nach (1)

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{50} = 22\,222. \tag{4}$$

Ordnet man jeweils einem Element aus M genau dann die Zahl k zu, wenn es in N_k liegt, und addiert hiernach die zugeordneten Zahlen aller Elemente von M[1], so erhält man dieselbe Summe, die man bekommt, wenn man für jedes $i=1,\dots,50$ die Anzahl der Elemente in M_i bildet und diese Anzahlen addiert. Wegen (2) beträgt jede dieser Anzahlen 1 111, also gilt

$$1.n_1 + 2.n_2 + \dots + 50.n_{50} = 50.1\,111 = 55\,550. \tag{5}$$

Für jedes Paar (i,j) ganzer Zahlen mit $1 \leqq i < j \leqq 50$ bezeichne D_{ij} den Durchschnitt von M_i und M_j. Es gibt genau $\binom{50}{2} = 1225$ solcher Paare. Ordnet man jeweils einem Element m aus M genau dann die Zahl h zu, wenn genau h verschiedene dieser Paare (i,j) mit $m \in D_{ij}$ existieren, und addiert hiernach die zugeordneten Zahlen aller Elemente von M, so erhält man wegen (3) die Summe $1225.22 = 26950$.

Liegt andererseits ein Element m von M in N_k, so existieren zu ihm mindestens $k-1$ verschiedene Paare (i,j) mit $m \in D_{ij}$, also gilt

$$0.n_1 + 1.n_2 + \dots + 49.n_{50} \leqq 26950. \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgt

$$1.n_1 + 2.n_2 + \dots + 50.n_{50} \leqq 22\,222 + 26\,950 = 49\,172.$$

Da dies (5) widerspricht, muß die eingangs gemachte Annahme falsch sein. Es kann also 50 derartige Teilmengen nicht geben.

---

1) Hierfür besteht auch die Ausdrucksweise, jedes Element von M "werde k-fach gezählt", wenn es in N_k liegt.

Unlauf

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

181234) Lösung: 5 Punkte

Angenommen, f wäre periodisch. Dann gäbe es eine Zahl $p \neq 0$ mit $f(p) = f(0)$. Aus dieser Gleichung, d. h. aus

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(p\sqrt{k}) = n$$

folgte wegen $\cos(p\sqrt{k}) \leq 1$ $(k = 1,\ldots,n)$, daß

$$\cos(p\sqrt{k}) = 1 \quad \text{für alle } k = 1,\ldots,n,$$

also wegen $n \geqq 2$ insbesondere

$$\cos p = 1 \qquad (1)$$

und

$$\cos p\sqrt{2} = 1 \qquad (2)$$

gelten müßte.

Aus (1) folgte die Existenz einer ganzen Zahl m_1 mit

$$p = 2m_1\pi\ ,$$

aus (2) folgte die Existenz einer ganzen Zahl m_2 mit

$$p\sqrt{2} = 2m_2\pi\ .$$

Wegen $p \neq 0$ wäre auch $m_1 \neq 0$, und es ergäbe sich der Widerspruch, daß

$$\sqrt{2} = \frac{m_2}{m_1}$$

eine rationale Zahl wäre. Damit ist die Annahme, f wäre periodisch widerlegt.

181235) Lösung: 8 Punkte

a) Für alle genannten x_i gilt $x_i \leqq 1$, also $x_i^3 \leqq x_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ und daher $x_1^3 + \ldots + x_n^3 \leqq x_1 + \ldots + x_n = 1$.

Ferner erfüllen z. B. $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$ die Bedingungen, $x_i \geqq 0$ und $x_1 + \ldots + x_n = 1$, und für diese Zahlen ist $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = 1$.

Daher befinden sich unter den genannten x_i auch solche, für die $x_1^3 + \ldots + x_n^3$ möglichst groß ist; der größte Wert beträgt 1.

b) Die Zahlen $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ erfüllen die Bedingungen $x_i \geqq 0$ und $x_1 + \ldots + x_n = 1$, und für diese Zahlen ist $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

Sind ferner $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ beliebige Zahlen mit $x_1 + \ldots + x_n = 1$, so seien $d_1, \ldots, d_n$ diejenigen Zahlen, für die $x_i = \frac{1}{n} + d_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ gilt. Wegen $x_i \geqq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ gilt dann $d_i \geqq -\frac{1}{n}$ $(i = 1,\ldots,n)$ und $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$, also

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2}d_i + \frac{3}{n}d_i^2 + d_i^3\right)\\ &= n.\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\left(\frac{3}{n} + d_i\right)\\ &\geqq n.\frac{1}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \cdot \frac{2}{n}\\ &\geqq \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Daher befinden sich unter den genannten x_i auch solche, für die $x_1^3+\ldots+x_n^3$ möglichst klein ist; der kleinste Wert beträgt $\frac{1}{n^2}$.

<u>181236A)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es wird zuerst durch vollständige Induktion bewiesen, daß für alle $n=1,2,\ldots$

$$-1 \leqq a_n \leqq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad (1)$$

gilt:

Es gilt $a_1^3 = \frac{1}{2}a_0^2 - 1 = -1$, also $a_1 = -1$; somit ist (1) für $n = 1$ richtig. Angenommen, für einen Wert $n = k \geqq 1$ sei (1) richtig. Dann gilt

$$-1 \leqq a_k \leqq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Daraus folgt $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leqq a_k^2 \leqq 1$, also $-1 < \frac{1}{2}a_k^2 - 1 = a_{k+1}^3 \leqq -\frac{1}{2}$,

$-1 \leqq a_{k+1} \leqq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, d. h. die Richtigkeit von (1) für den Wert

$n = k+1$.

Damit ist (1) bewiesen.

Für alle $n = 1,2,\ldots$ gilt nun

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 = \frac{1}{2}(a_n^2 - a_{n-1}^2), \text{ also}$$

$$(a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2) \cdot |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2}|a_n + a_{n-1}| \cdot |a_n - a_{n-1}|. \quad (2)$$

Da wegen (1) für alle $n = 1,2,\ldots$

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2 \geq 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ und } -2 \leq a_n + a_{n-1} < 0\text{[1]},$$

$$\text{also } \frac{1}{2}|a_n + a_{n-1}| \leq 1$$

gilt, so folgt aus (2)

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot |a_n - a_{n-1}|.$$

Wegen $27 > 4$ ist $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ eine positive Zahl kleiner als 1. Damit ist der geforderte Beweis geführt; als eine Zahl der gesuchten Art ist

$$q = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad \text{nachgewiesen.}$$

---

1) für $n = 1$ folgt dies direkt aus $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.

<u>181236B) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet, die Längen $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ mit a', b' bzw. c'. Nach Definition von B' und C' gilt $\overline{B'} = c$, $\overline{AC'} = b$, $\sphericalangle B'AC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC = \alpha$; ferner liegen B und B' auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, C, und es liegen C und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, B. Also hat der (nicht überstumpfe) Winkel, den die Strecken AB' und AC' einschließen, eine der Größen 3α, $360^\circ - 3\alpha$, $3\alpha - 360^\circ$. Wegen $\cos 3\alpha = \cos(360^\circ - 3\alpha) = \cos(3\alpha - 360^\circ)$ folgt daher aus dem Kosinussatz (oder, wenn $3\alpha = 180^\circ$ ist, aus $\cos 180^\circ = -1$ und $\overline{B'C'} = \overline{B'A} + \overline{AC'}$ bzw., wenn $3\alpha = 360^\circ$ ist, aus $\cos 360^\circ = 1$ und $\overline{B'C'} = |\overline{B'A} - \overline{AC'}|$):

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3\alpha . \quad (1)$$

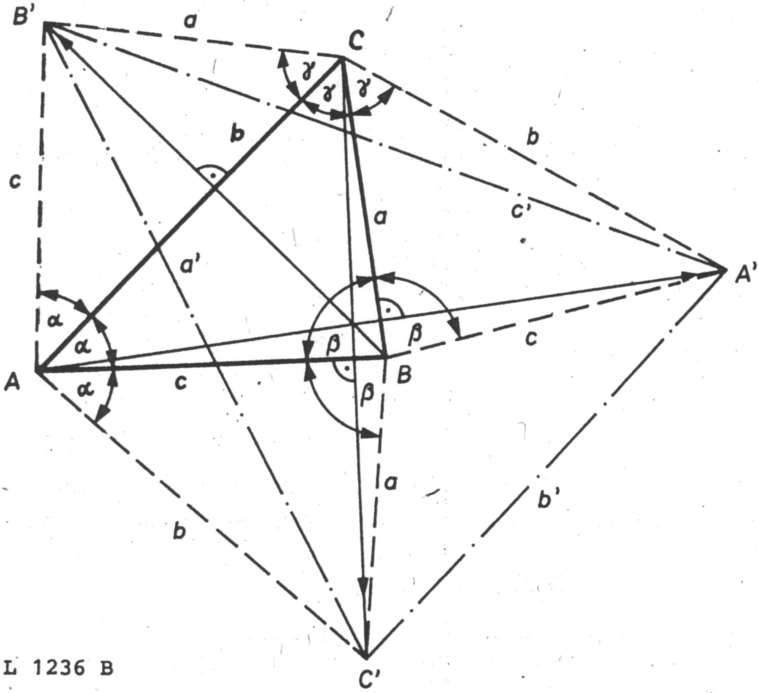

Abb. L 1236 B

Nach dem Kosinussatz und den Additionstheoremen des Kosinus und des Sinus gilt

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

$$4\cos^2\alpha - 3 = \frac{1}{b^2c^2}(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4),$$

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = (4\cos^2\alpha - 3)\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2b^3c^3}(-a^6 + 3a^4b^2 - 3a^2b^4 + b^6 + 3a^4c^2 - 3a^4c^2 -$$

$$- 3a^2b^2c^2 - 3a^2c^4 + c^6), \text{ also}$$

$$a'^2 = \frac{1}{b^2c^2}(a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 - 3a^4c^2 + 3a^2b^2c^2 + b^4c^2 +$$

$$+ 3a^2c^4 + b^2c^4 - c^6).$$

Durch zyklische Vertauschung von a,b,c ergibt sich

$$b'^2 = \frac{1}{a^2c^2}(-a^6 + 3a^4b^2 - 3a^2b^4 + b^6 + a^4c^2 + 3a^2b^2c^2 -$$
$$- 3b^4c^2 + a^2c^4 + 3b^2c^4 - c^6).$$

Daher ist die Beziehung a:b = a':b' der Reihe nach äquivalent mit

$$a'^2b^2 = b'^2a^2,$$
$$2(a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 - 2a^4c^2 + 2b^4c^2 + a^2c^4 - b^2c^4) = 0,$$
$$(a^2 - b^2)((a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4) = 0,$$
$$(a^2 - b^2)((a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2) = 0. \qquad (2)$$

Nun gilt $1 > |\cos\gamma| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab}$, also

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0.$$

Somit ist (2) weiter äquivalent mit

$$a^2 - b^2 = 0,$$
$$a = b.$$

Entsprechend folgt, daß b : c = b' : c' äquivalent mit b = c ist. Daher gilt genau dann a : b : c = a' : b' : c', wenn a = b = c gilt, w.z.b.w.