XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

181221

Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, daß durch

$$a_n = \frac{n+b}{cn+d} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt. Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

181222

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch

$k = \frac{x}{x^2 - 5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

181223

Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt. Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t.

Man beweise, daß es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

A 11/12

181224

Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:

"(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.

(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.

(3) Kein Schüler betreibt mehr als 2 dieser Sportarten.

(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.

(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.

(6) Die Anzahl der "Fußballer" ist größer als die Anzahl der "Schwimmer", diese wiederum ist größer als die Anzahl der "Turner" und diese größer als die Anzahl der "Leichtathleten".

(7) Die Anzahl der "Fußballer" ist gleich der Summe der Anzahl der "Turner" und der "Leichtathleten".

In (6) und (7) bezeichnet "Fußballer", "Schwimmer" usw. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.

Gib die Anzahl der "Fußballer", der "Schwimmer", der "Turner" und der "Leichtathleten" in meiner Klasse an!"

Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, daß diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei.

Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Unlauft

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

181221) Lösung: 8 Punkte

[illegible]genommen, für reelle b, c, d seien die Forderungen erfüllt. Dann ist $c \neq 0$; denn wäre $c = 0$, so wäre im Falle $d = 0$ durch den Term $\frac{n+b}{cn+d}$ für kein n eine Zahl definiert, im Fall $d > 0$ wäre $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+b}{d} = +\infty$, und im Fall $d < 0$ wäre $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+b}{d} = -\infty$.

Hiernach, sowie wegen $\frac{n+b}{cn+d} = \frac{1 + \frac{b}{n}}{c + \frac{d}{n}}$ (für alle diejenigen $n = 1, 2, 3, \ldots$, für die $cn+d \neq 0$ ist) und $\lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{b}{n}) = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} (c+\frac{d}{n}) = c \neq 0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+b}{cn+d} = \frac{1}{c}$, so daß die Gleichung $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, also $c = 2$ folgt.

Aus $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ folgt dann weiter $\frac{1 + b}{2 + d} = \frac{1}{3}$ und $\frac{2 + b}{4 + d} = \frac{3}{8}$, also $3b - d = -1$ und $8b - 3d = -4$.

Aus diesem Gleichungssystem folgt $b = 1$, $d = 4$. Also können nur $b = 1$, $c = 2$, $d = 4$ die gestellten Forderungen erfüllen. Sie erfüllen diese Forderungen; denn durch $a_n = \frac{n+1}{2n+4}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ [illegible]rd eine Zahlenfolge definiert, für die

$$a_1 = \frac{1 + 1}{2.1+4} = \frac{1}{3},\quad a_2 = \frac{2 + 1}{2.2+4} = \frac{3}{8} \text{ und } \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n + 1}{2.n+4} = \frac{1}{2}$$

gilt.

181222) Lösung: 9 Punkte

Da die Diskriminante von $x^2 - 5x + 7$ die negative Zahl $\frac{25}{4} - 7$ ist, gilt $x^2 - 5x + 7 \neq 0$ für alle reellen x. Somit wird genau dann für eine reelle Zahl x durch den in der Aufgabe genannten Term eine ganze Zahl k definiert, wenn für diese Zahlen x, k

$$x = k\,(x^2 - 5x + 7) \tag{1}$$

gilt. Im Fall $k = 0$ ist (1) äquivalent mit $x = 0$, im Fall $k \neq 0$ mit

$$x^2 - \left(5 + \frac{1}{k}\right) x + 7 = 0. \tag{2}$$

Die Diskriminante von (2) ist genau dann größer oder gleich 0, wenn

$$\left(5 + \frac{1}{k}\right)^2 \geqq 28 \tag{3}$$

gilt. Für ganzzahliges *) $k \neq 0$ ist nun $k \leqq -1$ oder $k > 0$, also jedenfalls $\frac{1}{k} \geqq -1$, $5 + \frac{1}{k} \geqq 4 > 0$ und daher (3) äquivalent mit $5 + \frac{1}{k} \geqq \sqrt{28}$ und dies mit $\frac{1}{k} \geqq \sqrt{28} - 5$. Wegen $\sqrt{28} - 5 > 0$ ist dies äquivalent mit $0 < k \leqq \frac{1}{\sqrt{28} - 5}$ d. h. mit

$$0 < k \leqq \frac{1}{3}\,(\sqrt{28} + 5). \tag{4}$$

Wegen $4 < \sqrt{28} < 7$ gilt $3 < \frac{1}{3}(\sqrt{28} + 5) < 4$; somit sind $k = 1, 2, 3$ alle diejenigen ganzen Zahlen, zu denen es reelle x mit (2) gibt, und zwar genau $x = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{k}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(5 + \frac{1}{k}\right)^2 - 7}$,

d. h. für $k = 1$ genau $x = 3 + \sqrt{2}$ und $x = 3 - \sqrt{2}$,
für $k = 2$ genau $x = \frac{7}{2}$ und $x = 2$,
für $k = 3$ genau $x = 3$ und $x = \frac{7}{3}$.

Also haben genau die Zahlen

$$0,\ 2,\ 3,\ \frac{7}{2},\ \frac{7}{3},\ 3 + \sqrt{2},\ 3 - \sqrt{2}$$

die verlangte Eigenschaft.

---

*) Statt der folgenden Überlegung, die für ganzzahlige k die Äquivalenz von (3) mit (4) erbringt, kann man auch ohne Ausnutzung der Ganzzahligkeit (3) für $k \neq 0$ als äquivalent mit $\frac{1}{3}(5 - \sqrt{28}) \leqq k \leqq \frac{1}{2}(5 + \sqrt{28})$ nachweisen.

181223) Lösung: 11 Punkte

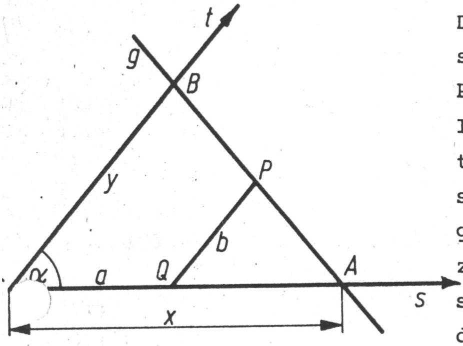

Abb. L 1223

Die Parallele durch P zu t schneidet s wegen $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ in einem Punkt Q; wir setzen $\overline{SQ} = a$, $\overline{QP} = b$. Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so setzen wir $\overline{SA} = x$, $\overline{SB} = y$. Dann gilt $x > a$, und umgekehrt gibt es zu jedem $x > a$ genau eine s und t schneidende und nicht durch S gehende Gerade g durch P mit $\overline{SA} = x$. Für jede solche Gerade g gilt nach dem Strahlensatz $y = \frac{bx}{x - a}$, also hat $\triangle SAB$ den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{bx^2}{x - a} \sin\alpha .$$

Somit hat F genau dann für ein $x > a$ einen möglichst kleinen Wert, wenn $\frac{x^2}{x - a}$ für dieses x einen (unter allen für irgendwelche $x > a$ entstehenden Werten) möglichst kleinen Wert w hat.

Für alle $x > a$ ist

$$\begin{aligned}(x - 2a)^2 &\geqq 0,\\ x^2 - 4ax + 4a^2 &\geqq 0,\\ \frac{x^2}{x - a} &\geqq 4a,\end{aligned}$$

und hierin gilt das Gleichheitszeichen genau für $x = 2a$.

Damit ist bewiesen, daß $\triangle SAB$ genau für diejenige Gerade g einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat, die durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man (konstruiert Q wie oben angegeben und) verlängert die Strecke SQ um ihre eigene Länge über Q hinaus bis A. Die Gerade durch A und P ist die gesuchte Gerade g.

181224) Lösung: 12 Punkte

Es bezeichne jeweils

F, S, T, L, FS, FT, FL, ST, SL, TL (8)

die Anzahl aller derjenigen Schüler, die genau die aus der betreffenden Abkürzung ersichtliche Menge von Sportarten betreiben. Mit diesen Bezeichnungen gilt: Genau dann sind (1) bis (7) erfüllt, wenn (8) natürliche Zahlen sind, die die Eigenschaften (9) bis (13) haben:

$$S = L = FT = 0,\ FS = 3,\ SL = 2, \tag{9}$$

$$F+FS+FT+FL \geqq 1,\ S+FS+ST+SL \geqq 1,\ T+FT+ST+TL \geqq 1,$$
$$L+FL+SL+TL \geqq 1, \tag{10}$$

$$F + S + T + L + FS + FT + FL + ST + SL + TL = 15. \tag{11}$$

$$F+FS+FT+FL > S+FS+ST+SL > T+FT+ST+TL > L+FL+SL+TL, \tag{12}$$

$$F + FS + FT + FL = (T + FT + ST + TL) + (L + FL + SL + TL). \tag{13}$$

Angenommen, für natürliche Zahlen (8) sei (9) bis (13) erfüllt.
Aus (11), (12), (13) folgt dann vermittels (9)

$$F + T + FL + ST + TL = 10, \tag{14}$$

$$F + FL \geqq ST + 3, \tag{15}$$

$$4 \geqq T + TL, \tag{16}$$

$$T + ST \geqq FL + 3, \tag{17}$$

$$F + 1 = T + ST + 2TL. \tag{18}$$

Aus (14), (15) ergibt sich durch Subtraktion von (18)

$$2T + FL + 2ST + 3TL = 11, \tag{19}$$

$$T + FL + 2TL \geqq 4. \tag{20}$$

Aus (20) bzw. (17) ergibt sich durch Subtraktion bzw. Addition von (19)

$$7 \geqq T + 2ST + TL, \tag{21}$$

$$3T + 3ST + 3TL \geqq 14. \tag{22}$$

Wegen der Ganzzahligkeit von T, ST, TL folgt aus (22) sogar

$$T + ST + TL \geqq 5. \tag{23}$$

Aus (16) und (21) ergibt sich durch Addition von (23)

$$ST \geqq 1, \qquad 2 \geqq ST.$$

Daher verbleiben nur die Möglichkeiten, daß entweder $ST = 1$ oder $ST = 2$ ist. Ist $ST = 1$, so folgt aus (21) und (23)
$T + TL \geqq 4$, hieraus und aus (16) also $T + TL = 4$ und damit aus (19)

$$FL + TL = 1. \tag{24}$$

Ist $ST = 2$, so folgt aus (21) und (23)
$3 \geqq T + TL$, $T + TL \geqq 3$, also $T + TL = 3$ und damit aus (19) ebenfalls (24).

Für (24) gibt es in natürlichen Zahlen nur die Möglichkeiten, daß entweder $FL = 0$, $TL = 1$ oder $FL = 1$, $TL = 0$ ist.
Aus den zuvor erhaltenen Gleichungen für $T + TL$ sowie aus (18) und (9) folgt dann, daß natürliche Zahlen nur dann (9) bis (13)

erfüllen können, wenn sie eines der in folgender Tabelle dargestellten Systeme bilden:

F	S	T	L	FS	FT	FL	ST	SL	TL
5	0	3	0	3	0	0	1	2	1
4	0	4	0	3	0	1	1	2	0
5	0	2	0	3	0	0	2	2	1
4	0	3	0	3	0	1	2	2	0

Diese Systeme erfüllen in der Tat (9) bis (13), wie man durch Einsetzen bestätigt. Daraus ergibt sich, daß genau die folgenden Anzahlen die gestellte Aufgabe lösen: 8 "Fußballer", 6 "Schwimmer", 5 "Turner" und 3 "Leichtathleten" bzw. 8 "Fußballer", 7 "Schwimmer", 5 "Turner" und 3 "Leichtathleten".

<u>Empfehlung</u> für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

181221

$c \neq o$ und Begründung dafür	2 Punkte
Ermittlung von $c = 2$	2 Punkte
Ermittlung von $b = 1$, $d = 4$	2 Punkte
Probe	2 Punkte
	8 Punkte

181222

Aufstellen von Gleichung (1)	1 Punkt
Angabe der Bedingung (3)	3 Punkte
Angabe der Bedingung (4)	2 Punkte
Ermittlung der x - Werte zu $k = 1$,	1 Punkt
zu $k = 2$,	1 Punkt
zu $k = 3$.	1 Punkt
	9 Punkte

181223

Ermittlung der Beziehung $y = \frac{bx}{x - a}$	3 Punkte
Ermittlung der Beziehung $F = \frac{1}{2} \frac{bx^2}{x-a} \sin\alpha$	2 Punkte
Nachweis der Beziehung $\frac{x^2}{x-a} = 4a$ und Angabe der Bedingung dafür, daß darin das Gleichheitszeichen gilt	3 Punkte
Angabe der Konstruktion	3 Punkte
	11 Punkte

181224

Inhaltliches oder formales Erfassen (Ungleichungen, Gleichungen) der Beziehungen (9) bis (13)	2 Punkte
Erfassen (wie oben) der Beziehungen (14) bis (18)	1 Punkt
Erfassen der Beziehungen (19) bis (23)	2 Punkte
$1 \leqq ST \leqq 2$	1 Punkt
Ermittlung von (24) für $ST = 1$	1 Punkt
Ermittlung von (24) für $ST = 2$	1 Punkt
Angaben der beiden Lösungssysteme entsprechend der "Lösungstabelle" (also je System 1 Punkt)	2 Punkte
Angabe der beiden Lösungen der Aufgabe	2 Punkte
	12 Punkte

Anmerkung: Das Erfassen der Beziehungen (19) bis (23) kann auch mit Hilfe von Tabellen "mit doppeltem Eingang" erfolgen. Die Ermittlung der weiteren Beziehungen erfolgt dann durch Vervollständigen der Tabellen. Hierfür sollten die Punkte möglichst dem obigen Vorschlag entsprechend aufgeteilt werden. Dabei sollten unbedingt auch Punkte für Begründungen gegeben bzw. für fehlende Begründungen abgezogen werden.