Kunlauft

L 10;I

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

181041) Lösung: 6 Punkte

Für die genannte Zahl x gilt $\log_{12}(\log_{11} x) = 13$, also $\log_{11} x = 12^{13}$ und daher

$$x = 11^{12^{13}}.$$

Wir ermitteln von den Potenzen von 11^s $(s = 1,2,\ldots)$ jeweils die letzten beiden Ziffern:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Letzte Ziffern von 11^s	11	21	31	41	51	61	71	81	91	01	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl t mit 11^{10}, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl t. Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl u die letzte Ziffer w, so hat 11^u dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^w; denn[1] mit einer natürlichen Zahl v ist $u = 10v + w$, also entsteht $11^u = (11^{10})^v \cdot 11^w$ aus 11^w durch v-maliges Multiplizieren mit 11^{10}.
Wir ermitteln nun von den Potenzen 12^y $(y = 1,2,\ldots)$ jeweils die letzte Ziffer:

y	1	2	3	4	...
Letzte Ziffer von 12^y	2	4	8	6	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl z, die die letzte Ziffer 2 hat, mit 12^4, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.
Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u = 12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w = 2$; denn[1] $12^{13} = (12^4)^3 \cdot 12$ entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit 12^4.
Somit hat $x = 11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^2, d. s. die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

1 Die hier (und im vorangehenden Text) formulierte Begründung kann auch in Form einer Periodizitätsaussage bei Fortsetzung der betreffenden Tabelle ausgedrückt werden.

181042) Lösung: **7 Punkte**

a) Konstruktionsbeschreibung:

Man konstruiert zwei von einem Punkt S_1 ausgehende Strahlen s_1, s_1', die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und zwei von einem Punkt S_2 ausgehende Strahlen s_2, s_2', die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Auf s_1 konstruiert man den Punkt P_1 mit $\overline{S_1P_1} = a_1$,
auf s_1' konstruiert man den Punkt P_1' mit $\overline{S_1P_1'} = c_2$,
auf s_2 konstruiert man den Punkt P_2 mit $\overline{S_2P_2} = a_2$,
auf s_2' konstruiert man den Punkt P_2' mit $\overline{S_2P_2'} = c_1$.

Auf der Verlängerung von S_1P_1' über P_1' hinaus konstruiert man den Punkt Q_1' mit $\overline{P_1'Q_1'} = b_1$,
auf der Verlängerung von S_2P_2' über P_2' hinaus konstruiert man den Punkt Q_2' mit $\overline{P_2'Q_2'} = b_2$.
Die Parallele durch Q_1' zu $P_1'P_1$ schneidet s_1 in Q_1,
die Parallele durch Q_2' zu $P_2'P_2$ schneidet s_2 in Q_2.

Beweis, daß so konstruierte Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (✱) haben:

Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{P_1Q_1} : a_1 = b_1 : c_2$, also

$$\overline{P_1Q_1} = \frac{a_1b_1}{c_2} \text{ und ebenso } \overline{P_2Q_2} = \frac{a_2b_2}{c_1}.$$

Falls $\overline{P_1Q_1} \overset{<}{\underset{>}{=}} P_2Q_2$ ist, gilt daher $\frac{a_1b_1}{c_2} \overset{<}{\underset{>}{=}} \frac{a_2b_2}{c_1}$ und folglich

$a_1b_1c_1 \overset{<}{\underset{>}{=}} a_2b_2c_2$, wie gefordert.

b) Die in a) beschriebene Konstruktion (s. Abb. L 1042) führt auf $\overline{P_1Q_1} < \overline{P_2Q_2}$ und somit auf $V_1 < V_2$.

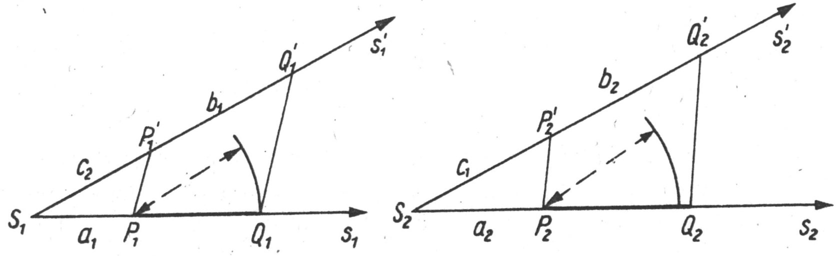

Abb. L 1042

181043A) Lösung: 7 Punkte

Der geforderte Nachweis ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß zu jeder reellen Zahl y genau eine reelle Zahl x mit

$$\frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = y \qquad (1)$$

existiert. Ein solcher Beweis kann folgendermaßen geführt werden: Es sei y eine beliebige reelle Zahl.

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x gelte (1). Dann folgt

$a^x - \frac{1}{a^x} = 2y$, also erfüllt die Zahl

$$t = a^x \qquad (2)$$

die Gleichung

$$t^2 - 2yt - 1 = 0. \qquad (3)$$

Aus (2) folgt

$$t > 0 \qquad (4)$$

und

$$x = \log_a t; \qquad (5)$$

aus (3) folgt, daß entweder

$$t = y + \sqrt{y^2 + 1} \qquad (6)$$

oder

$$t = y - \sqrt{y^2 + 1} \qquad (7)$$

gilt. Da jedoch $\sqrt{y^2 + 1} > |y| \geqq y$, also $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ gilt, steht (7) im Widerspruch zu (4) und scheidet somit aus. Aus (5) und (6) folgt

$$x = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1}). \qquad (8)$$

Also kann eine reelle Zahl x nur dann (1) erfüllen, wenn für sie (8) gilt.

(II) Umgekehrt gibt (8) in der Tat (zu beliebigem reellem y) eine reelle Zahl x an, die (1) erfüllt; denn erstens ist $\sqrt{y^2 + 1} > |y| \geqq -y$, also $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$, so daß $\log_a(y + \sqrt{y^2+1})$ (als reelle Zahl) definiert ist, und zweitens folgt aus (8), daß die durch (2) gegebene Zahl t die Gleichung (6) und somit auch (3) erfüllt. Das besagt (wegen der für (2) gültigen Ungleichung (4)) aber, daß x die Gleichung (1) erfüllt.

Mit (I) und (II) ist der geforderte Beweis geführt; zugleich ist gezeigt, daß die gesuchte Umkehrfunktion g die für alle reellen Zahlen y durch

$$g(y) = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

definierte Funktion ist.

181043B)Lösung: 7 Punkte

Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen

$$x \geqq 1 \quad , \qquad (1)$$
$$x + 3 \geqq 4\sqrt{x-1} \, , \qquad (2)$$
$$x + 8 \geqq 6\sqrt{x-1} \qquad (3)$$

gelten.

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1. \qquad (4)$$

Dann folgt

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \, ,$$
$$x+3-4\sqrt{x-1} = 1 - 2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + x + 8 - 6\sqrt{x-1} \, ,$$
$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 3 - \sqrt{x-1} \, , \qquad (5)$$

also

$$\sqrt{x-1} \leqq 3. \qquad (6)$$

Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 2 \, , \qquad (7)$$

also

$$\sqrt{x-1} \geqq 2. \qquad (8)$$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leqq x - 1 \leqq 9 \, , \qquad (9)$$

also

$$5 \leqq x \leqq 10. \qquad (10)$$

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl x die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8);

ferner gilt $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \geqq 0$, also $x^2 + 6x + 9 \geqq$ $\geqq 16x - 16$, d. h. $(x+3)^2 \geqq 16(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+3 > 0$ folgt) die Ungleichung (2). Weiterhin gilt $x^2-20x + 100 = (x-10)^2 \geqq 0$, also $x^2 + 16x + 64 \geqq$ $\geqq 36x - 36$, d. h. $(x+8)^2 \geqq 36(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+8 > 0$ folgt) die Ungleichung (3).

Ferner gilt $(\sqrt{x-1} - 2)^2 = x-1 - 4\sqrt{x-1} + 4 = x+3-4\sqrt{x-1}$; hieraus und aus (8) folgt (7).

Weiterhin gilt $(3-\sqrt{x-1})^2 = 9-6\sqrt{x-1} + x - 1 = x+8-6\sqrt{x-1}$; hieraus und aus (6) folgt (5).

Aus (5) und (7) aber ergibt sich, daß x auch (4) erfüllt.

Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Andere Lösungswege bestehen darin, außer der Diskussion von (1), (2), (3) für alle (verbleibenden) x durch Quadrieren die Identitäten

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = |2-\sqrt{x-1}|$ und $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = |3-\sqrt{x-1}|$ herzuleiten und nun die Forderung $|2-\sqrt{x-1}| + |3-\sqrt{x-1}| = 1$ durch Fallunterscheidung als äquivalent mit (6) und (8) nachzuweisen.

kursiert

L 10;II

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

181044) Lösung: 6 Punkte

a) Es gilt $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqq 0$,
also $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geqq 4ab$,
also wegen $a > 0$, $b > 0$

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \qquad (1)$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man

$$\frac{c+d}{2} \geqq \sqrt{cd} \qquad (2)$$

sowie für die Zahlen

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{c+d}{2} \qquad (3)$$

auch

$$\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}. \qquad (4)$$

Aus (1), (2), (3), (4) folgt

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geqq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd},$$

d. h. die zweite Behauptung.

181045) Lösung: 7 Punkte

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2 - 2^n = 153. \qquad (1)$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(n;z)$ sei (1) erfüllt.

1. Fall: n ist gerade, d. h., es gilt $n = 2m$ mit natürlichem m.

Aus (1) folgt dann

$$(z - 2^m)(z + 2^m) = 153. \qquad (2)$$

Da $153 = 3^2 \cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur 1.153, 3.51 und 9.17 besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$z - 2^m = 1, \quad z + 2^m = 153; \qquad (3)$$

$$z - 2^m = 3, \quad z + 2^m = 51; \qquad (4)$$

$$z - 2^m = 9, \quad z + 2^m = 17. \qquad (5)$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m = 76$, (4) auf den Widerspruch $2^m = 24$; (5) führt auf $z = 13$, $2^m = 4$, also $m = 2$, $n = 4$.

<u>2. Fall:</u> n ist ungerade.

Es gilt $2 \equiv -1 \pmod 3$, also $2^n \equiv -1 \pmod 3$.

Ist nun $z \equiv 0 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 0 + 1 \pmod 3; \qquad (6)$$

ist aber $z \equiv 1 \pmod 3$ oder $z \equiv -1 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 1 + 1 \pmod 3. \qquad (7)$$

Wegen $153 \equiv 0 \pmod 3$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1).

Daher kann (1) nur durch (4; 13) erfüllt werden.

(II) In der Tat erfüllen diese Zahlen (1); denn es gilt

$2^4 + 12^2 = 16 + 144 = 160 = 169 - 9$.

Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

<u>181046)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

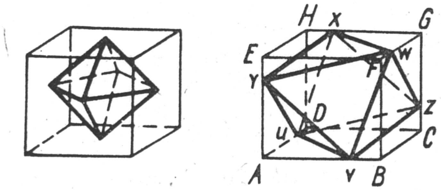

Abb. L 1046

Die Kantenlänge b des erstgenannten Oktaeders ist gleich der Entfernung zweier benachbarter Seitenmitten in einem Quadrat der Kantenlänge a, d. es gilt $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $a = b\sqrt{2}$. Setzt man das Oktaeder zusammen aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge b, so ist (für beide Pyramiden) die zugehörige Höhe jeweils gleich $\frac{a}{2}$.

Daher ist $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6} a^3$.

Die Ecken des Würfels seien wie in der Abb. L 1046 mit A,B,C,D, E,F,G,H bezeichnet. Wählt man auf AB, AD, GF, GH jeweils einen Punkt V,U,W bzw. X mit $x = \overline{AV} = \overline{AU} = \overline{GW} = \overline{GX}$, so wird UVWX ein Parallelogramm; denn die Strecken UV und XW sind zueinander parallel und gleichlang. Ferner liegt die entstandene Figur symmetrisch zur Ebene durch A,C,G,E; also ist $\overline{UW} = \overline{VX}$; folglich ist UVWX ein Rechteck. Dabei ist $\overline{UV}$ gleich der Diagonalenlänge eines Quadrats der Kantenlänge x, also $\overline{UV} = x\sqrt{2}$; und $\overline{VW}$ ist gleich der Länge der Körperdiagonalen in einem Quader mit den Kantenlängen a, a-x, a-x, also $\overline{VW} = \sqrt{a^2 + 2(a-x)^2}$. Wählt man daher x so, daß

$$a^2 + 2(a-x)^2 = 2x^2 \qquad (1)$$

gilt, so wird UVWX ein Quadrat. Die Bedingung (1) ist erfüllt, wenn $3a^2 - 4ax = 0$ gilt, d. h. für $x = \frac{3}{4}a$.

Wählt man nun noch Y auf AE und Z auf GC mit $\overline{AY} = \overline{GZ} = x = \frac{3}{4}a$, so ist auch jede der Strecken YU,YV,YW, YX,ZU,ZV,ZW,ZX die Diagonale in einem Quadrat der Kantenlänge x oder die Körperdiagonale in einem Quader mit den Kantenlängen a, a-x, a-x. Also haben alle diese Strecken ebenfalls die Länge $\overline{UV} = \overline{VW} = \overline{WX} = \overline{XU}$. Daher sind die Dreiecke UVY,VWY,WXY,XUY,UVZ,VWZ,WXZ,XUZ gleichseitig. Folglich ist der von ihnen eingeschlossene Körper zusammensetzbar aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen; d. h., er ist ein regelmäßiges Oktaeder. Seine Kantenlänge ist $b' = x\sqrt{2}$; für sein Volumen erhält man (entsprechend der Berechnung von V) den Wert

$$\frac{1}{6}(b'\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}x^3 = \frac{9}{16}a^3 > \frac{1}{2}a^3 = 3V, \qquad \text{w.z.b.w.}$$