L 10

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

<u>181021) Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

Angenommen, eine Anordnung von Punkten A, ..., F erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefaßt. Wegen $\overline{BE}$ = 11 cm kann dabei erreicht werden, daß die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $\overline{BC}$ = 6 cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $\overline{DE}$ = 7 cm der Zahl 4 oder der Zahl 18. Hiernach kann aber $\overline{CD}$ = 2 cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht. Nun folgt weiter: Wegen $\overline{AB}$ = 10 cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $\overline{FD}$ = 3 cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7. $\overline{AF}$ = 3 cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung in Abb. L. 1021 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.

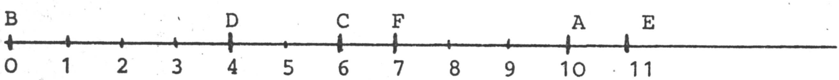

Abb. L 1021

In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E.

Hinweis zur Korrektur: Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.

<u>181022) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

<u>Variante I:</u>

Wegen $\overline{CD} = \overline{BD} = \overline{BC}$ ist das Dreieck CBD gleichseitig.
Damit gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = 60^\circ$.

Ferner ist wegen $\overline{DE}$ $(= \overline{CD}) = \overline{BD}$ das Dreieck BED gleichschenklig, und es gilt $\overline{\sphericalangle\, DBE} = \overline{\sphericalangle\, BED}$ (als Basiswinkel).

Nach einem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks folgt ferner

$\overline{\sphericalangle\, BDC} = \overline{\sphericalangle\, DBE} + \overline{\sphericalangle\, BED}$.

Daraus erhält man $\overline{\sphericalangle\, DBE} = 30^\circ$,

Damit ist $\overline{\sphericalangle\, CBE} = \overline{\sphericalangle\, CBD} + \overline{\sphericalangle\, DBE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Also ist BE Senkrechte zu AB in B.

Variante II:

Nach Konstruktion gilt $\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{DB}$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\sphericalangle$ CBE ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

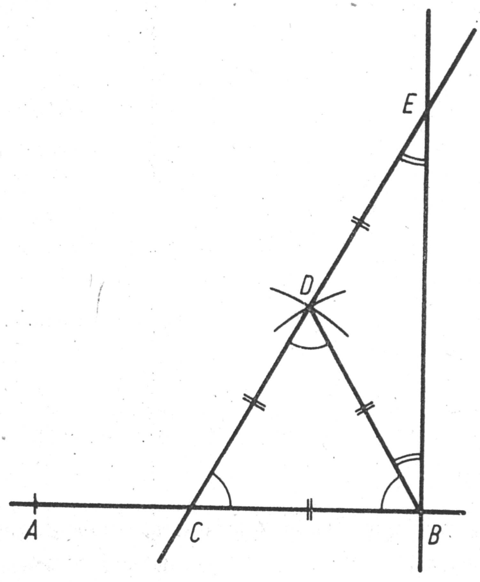

Abb. L 1022

181023) Lösung: 9 Punkte

Variante I:

Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere a + 1, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s = a^2 + (a+1)^2$$
$$= 2a^2 + 2a + 1 = 2a\,(a+1) + 1$$

L 10

Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 oder 2.

Fall 1: a ist durch 3 teilbar. Dann ist auch 2a (a + 1) durch 3 teilbar, und s läßt bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 2: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann ist a + 1 durch 3 teilbar, damit auch 2a (a + 1), und somit läßt s bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 3: a läßt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form 3n + 1 darstellbar. Man erhält mithin

$$\begin{aligned} s &= 2\,(3n + 1)\cdot(3n + 2) + 1, \\ &= 2\,(9n^2 + 9n + 2) + 1, \\ &= 18n^2 + 18n + 5, \end{aligned}$$

und $18n^2 + 18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 läßt.

Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

<u>Variante II:</u>

Die zu betrachtende Summe ist $s = a^2 + (a + 1)^2$ mit natürlichem a (s. Variante I, Anfang). Jede natürliche Zahl ist modulo 3 einer der Zahlen 0, 1, 2 kongruent.

Ist $a \equiv 0\ (3)$, so ist $a+1 \equiv 1\ (3)$, $(a+1)^2 \equiv 1\ (3)$, also $s \equiv 1\ (3)$.

Ist $a \equiv 1\ (3)$, so ist $a+1 \equiv 2\ (3)$, $(a+1)^2 \equiv 1\ (3)$, also $s \equiv 2\ (3)$.

Ist $a \equiv 2\ (3)$, so ist $a+1 \equiv 0\ (3)$, $(a+1)^2 \equiv 0\ (3)$, also $s \equiv 1\ (3)$.

<u>Variante III:</u>

Die zu betrachtende Summe ist $s = a^2 + (a+1)^2$.

Jede natürliche Zahl a läßt sich in der Form $a = 3n + r$ mit natürlichen Zahlen n, r schreiben, wobei $0 \leq r \leq 2$ gilt. Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} s &= (3n+r)^2 + (3n+r)^2 + 2(3n+r) + 1, \\ &= 18n^2 + 12nr + 6n + 2r^2 + 2r + 1. \end{aligned}$$

Da die ersten drei Summanden durch 3 teilbar sind, ist s nur dann durch 3 teilbar, wenn der Term $2r^2 + 2r + 1$ dies ist.

Setzt man 0, 1 bzw. 2 für r in diesen Term ein, so erhält man als Wert des Terms 1, 5 bzw. 13. Da dieser Wert in keinem der Fälle durch 3 teilbar ist, ist es auch s nicht.

181024) Lösung: 12 Punkte

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt
$\sphericalangle ABC = \beta = 30^\circ$, und damit $\overline{AB} = \overline{AC}$. (1)

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt
$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$. (2)

Wegen (1) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig. Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist CABM ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist $\overline{BC}$ die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang
$\overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC} = r + r + 2\frac{r}{2}\cdot\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})r$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus CABM, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit

$$\frac{r^2}{4}\cdot\sqrt{3}.$$

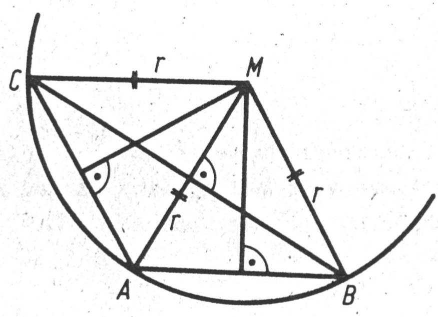

Abb. L 1024

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

181021	9 Punkte

181022

Begründete Aussagen: $\triangle$ CBD ist gleichseitig	1 Punkt
$\overline{\sphericalangle\ CBD} = \overline{\sphericalangle\ CBD} = 60^{\circ}$	1 Punkt
$\triangle$ BED ist gleichschenklig	1 Punkt
$\overline{\sphericalangle\ DBE} = \overline{\sphericalangle\ BED}$	1 Punkt
$\overline{\sphericalangle\ DBE} = 30^{\circ}$	3 Punkte
$\overline{\sphericalangle\ CBE} = 90^{\circ}$	3 Punkte
	10 Punkte

181023

Angabe der beiden Zahlen mit Variablen	1 Punkt
Angabe der Summe mit Variablen und Umformung	2 Punkte
Fallunterscheidung	1 Punkt
Fall 1	1 Punkt
Fall 2	1 Punkt
Fall 3	3 Punkte
	9 Punkte

181024

Begründete Aussagen:	
$\overline{\sphericalangle\ ABC} = 30^{\circ}$	1 Punkt
$\overline{AB} = \overline{AC}$	1 Punkt
ABM ist gleichseitig	3 Punkte
CABM ist Rhombus	1 Punkt
BC ist doppelt so lang wie Höhe ...	2 Punkte
Angabe des Umfangs	2 Punkte
Angabe des Flächeninhalts	2 Punkte
	12 Punkte