XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

180931

Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

180932

In einer Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist: "Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist."

180933

Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei. Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt. Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

180934

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis 1 : 3.
Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

180935

Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 läßt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

180936

Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks. Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle$ ABC das Bilddreieck $A_1B_1C_1$. Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle$ ABC das Bilddreieck $A_2B_2C_2$. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und ($A_1B_1C_1$) sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und ($A_2B_2C_2$) sei die Fläche F_2.
Man beweise, daß F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

180931) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gäbe reelle Zahlen a, b, c, d, für die $ab - cd \neq 0$ [gi]lt und zugleich die Aussage, daß $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$ sei, nicht zutrifft. Dann wäre für diese Zahlen weder $a^2 + b^2 > 0$ noch $c^2 + d^2 > 0$.

Da für reelle a, b stets $a^2 + b^2 \geq 0$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen nur für $a = b = 0$ zutrifft, müßte demnach $a = b = 0$ sein. Ebenso folgte $c = d = 0$. Also ergäbe sich $ab - cd = 0$, im Widerspruch gegen $ab - cd \neq 0$.

Wegen dieses Widerspruchs ist die eingangs gemachte Annahme falsch; damit ist der geforderte Beweis erbracht.

180932) Lösung: 6 Punkte

Man beweist die folgenden Behauptungen (1), (2):

(1) Es gibt 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen jede als Quersumme eine nicht durch 4 teilbare Zahl besitzt.

(2) Für jede natürliche Zahl $n \geq 7$ gilt: Unter je n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es eine, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

[Be]weis zu (1): Zum Nachweis genügt die Angabe eines Beispiels. Ein solches bilden etwa die 6 aufeinanderfolgenden Zahlen

997, 998, 999, 1000, 1001, 1002;

denn ihre Quersummen 25, 26, 27, 1, 2, 3 sind sämtlich nicht durch 4 teilbar.

Beweis zu (2): Es sei n irgendeine natürliche Zahl, die größer oder gleich 7 ist. Für je n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt dann: Ist a die kleinste unter ihnen, so kommen wegen $n \geq 7$ unter ihnen mindestens die Zahlen $a, a+1, \ldots, a+6$ vor.

Es gibt nun nur folgende Möglichkeiten:

I) Die Einerziffer x von a ist eine der Ziffern 0, ..., 6.
Ist dann s die Summe aller Ziffern, die in a vor der Einerziffer stehen, so haben a, ..., a+3 die Quersummen s+x, s+x+1, s+x+2, s+x+3.
Da dies 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, befindet sich unter ihnen eine durch 4 teilbare Zahl.

II) Die Einerziffer von a ist eine der Ziffern 7, 8, 9.
Dann hat die Zahl a+3 als Einerziffer y eine der Ziffern 0, 1, 2. Ist t die Summe aller Ziffern, die in a+3 vor der Einerziffer stehen, so haben a+3, ..., a+6 die Quersummen t+y, t+y+1, t+y+2, t+y+3.
Da dies 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, befindet sich unter ihnen eine durch 4 teilbare Zahl.

Aus den somit bewiesenen Behauptungen (1), (2) ergibt sich: Die in der Aufgabenstellung genannte Aussage ist wahr für n = 6, sie ist falsch für jede natürliche Zahl $n \geq 7$. Daraus folgt: Die gesuchte Zahl lautet 6.

<u>180933) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

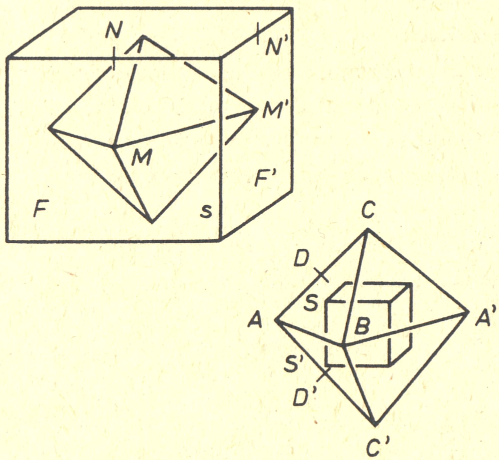

Abb. L 933

Die Kantenlänge des gegebenen Würfels sei a. Es seien F und F' zwei benachbarte Seitenflächen dieses Würfels; ihre Mittelpunkte seien M bzw. M', die Kante, die F und F' als benachbarte Seitenflächen gemeinsam haben, sei s. Bei einer Verschiebung (parallel zu s um den Betrag $\frac{a}{2}$) gehen M, M' in die Mittelpunkte N, N' zweier benachbarter Seitenkanten eines Quadrates der Kantenlänge a über.

Daher hat das Oktaeder die Kantenlänge

$$b = \overline{MM'} = \overline{NN'} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Das Oktaeder läßt sich in zwei vierseitige Pyramiden mit einem Quadrat der Kantenlänge b als Grundfläche und $\frac{a}{2}$ als Länge der zugehörigen Höhe zerlegen; daher beträgt das Oktaedervolumen

$V_2 = 2.\frac{1}{3}.b^2.\frac{a}{2} = 2.\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6}V_1.$

Weiter seien die Flächen der Dreiecke ABC und ABC' zwei benachbarte Seitenflächen des Oktaeders; ihre Schwerpunkte seien S bzw. S'; die Mittelpunkte von AC bzw. AC' seien D bzw. D'. Dann teilen S bzw. S' die Strecken BD bzw. BD' im Verhältnis 2:1, nach dem Strahlensatz (einschließlich Umkehrung) folgt SS' $\parallel$ DD' und $\overline{SS'} = \frac{2}{3}\overline{DD'}$.

Ist ferner A' die gegenüberliegende Oktaederecke zu A, so ist ACA'C' ein Quadrat der Kantenlänge b, also gilt $\overline{DD'} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.b$.

Daher hat der zweite Würfel die Kantenlänge $\overline{SS'} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}.b$

$= \frac{1}{3}\sqrt{2}.\frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{3}$ und folglich das Volumen $V_3 = \frac{a^3}{27} = \frac{1}{27}V_1$.

Somit gilt $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2$.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

180934) Lösung: 6 Punkte

Die Länge der Hypotenuse sei c. Der Fußpunkt der von c auf AB gefällten Höhe sei D.

O.B.d.A. gilt dann $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$, also

$\overline{AD} = \frac{1}{4}c$.

Daraus folgt nach dem Kathetensatz

$\overline{AC}^2 = c \cdot \frac{c}{4}$, also $\overline{AC} = \frac{c}{2}$.

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, so entsteht das Dreieck AA'B, wobei A' das Bild von A ist. Für die Seiten dieses Dreiecks gilt

$\overline{AA'} = 2 \cdot \frac{c}{2} = c$, $\overline{AB} = \overline{A'B} = c$.

Das Dreieck AA'B ist also gleichseitig, folglich gilt

$\overline{\sphericalangle A'AB} = \overline{\sphericalangle CAB} = 60^\circ$.

Die Größe des einen der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC beträgt also 60°, die des anderen daher 30°.

180935) Lösung: 6 Punkte

Läßt p bei Division durch 30 den Rest r, so ist r eine natürliche Zahl mit $r < 30$, für die $p = 30n + r$ mit natürlichem n gilt.

Ist dabei $n = 0$, so ist $r = p$ Primzahl.

Ist $n \geq 1$, so ist r kein Vielfaches von 2, 3 oder 5; denn wäre dies der Fall, so wäre p durch 2, 3 bzw. 5 teilbar und zugleich größer oder gleich 30, also keine Primzahl. Jede natürliche Zahl $r < 30$ aber, die nicht Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, ist entweder 1 oder eine Primzahl. (Dies erkennt man durch aufzählendes Probieren oder folgendermaßen: Wenn eine natürliche Zahl r weder 1 noch Primzahl noch Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, so ist sie das Produkt mindestens zweier Primzahlen, die sämtlich größer oder gleich 7 sind, also gilt dann $r \geq 49 > 30$.)

Damit ist die Behauptung in jedem Falle bewiesen.

180936) Lösung: 8 Punkte

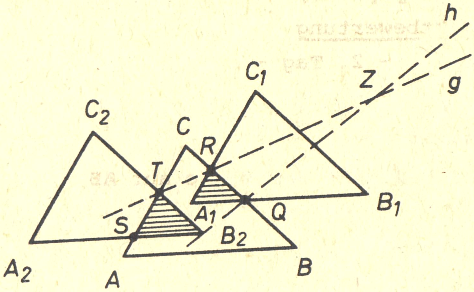

Abb. L 936

Die Strecken A_1B_1, A_1C_1 schneiden[1] BC in je einem Punkt Q bzw. R, die Strecken A_2B_2, C_2B_2 schneiden[1] AC in je einem Punkte S bzw. T. Mit diesen Bezeichnungen sind F_1, F_2 die Dreiecksflächen (A_1QR) bzw. (SB_2T), und wegen ihrer Entstehung bei den genannten Verschiebungen gilt

$A_1Q \parallel SB_2$, $QR \parallel B_2T$, $RA_1 \parallel TS$. (1)

Da T, Q, R nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (und dasselbe für B_2, Q, R gilt, also insbesondere $R \neq T$ sowie $Q \neq B_2$ ist[2]), sind die durch R, T gehende Gerade g und die durch Q, B_2 gehende Gerade h (jeweils eindeutig bestimmt[2] und) voneinander verschieden[3].

I) Ist $g \parallel h$, so folgt hieraus und aus (1), daß RTB_2Q ein Parallelogramm ist. Es gibt daher eine Verschiebung, die R in T und Q in B_2 überführt.

II) Ist $g \nparallel h$, so haben g und h genau einen Punkt Z ($\neq$ R, T, B_2, Q) gemeinsam. Diejenige Streckung mit Z als Zentrum, die R in T überführt, führt Q in den Schnittpunkt von h mit der Parallelen durch T zu RQ über, also nach (1) in den Punkt B_2.

Die in (I) bzw. (II) genannte Verschiebung bzw. Streckung führt die Gerade durch Q, A_1 in die zu ihr parallele Gerade durch B_2 über, also wegen (1) in die Gerade durch B_2, S. Ebenso führt diese Verschiebung bzw. Streckung die Gerade durch R, A_1 in die Gerade durch T, S über. Daher führt sie A_1 in S und somit insgesamt die Fläche F_1 in die Fläche F_2 über, w.z.b.w.

Hinweise zur Korrektur:

1) Ein Beweis dieser Aussagen wird vom Schüler nicht verlangt.
2) Die ausdrückliche Erwähnung derartiger Verschiedenheitsrelationen bzw. Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Geraden, wird nicht vollständig vom Schüler verlangt.

3) Statt mit den obengenannten Geraden g und h kann auch mit g und der Geraden k durch A_1,S argumentiert werden. Für Beweis-wege mit h und k wäre dagegen zu beachten, daß auch S,B_2,A_1,Q kollinear, also h und k miteinander identisch sein können. (Das würde in (I) die sofortige Verwendung der Parallelogramm-eigenschaft verhindern bzw. überhaupt die Möglichkeit offen-lassen, daß statt (I) eine Streckung mit einem geeigneten Punkt Z auf h (=k) heranzuziehen wäre.) Die Beachtung dieser Möglichkeit wird vom Schüler gefordert.